Allocation stratégique d'actifs : Application des modèles ALM classiques(déterministes) à un portefeuille du marché marocain

Strategic asset allocation : Application of classical (deterministic) ALM models to a portfolio of the Moroccan market

CHIBOUB Omar

Doctorant FSJES Souissi Université Mohammed 5

Laboratoire d'analyse économique et de modélisation

Email : chiboubomar56@gmail.com

Abstract

Strategic Asset Allocation means in the economic literature is the science that seeks to create a portfolio that will allow the owner to have the best balance between risk and return, in this case we can distinguish several approaches: discrete strategic asset allocation, static strategic asset allocation in continuous time and dynamic strategic asset allocation in continuous time. In this document we will work on the first approach, the main idea is to start from a classical mean / variance optimization model, to apply it to our sample (ten stocks, one bond, UCITS and a monetary product) and try to develop it each time by adding constraints or remodeling the objective function. , this approach is based on notions such as duration, surplus, risk tolerance ... ETC to ensure the matching of liabilities with the investor's assets, in other way that means to build the portfolio which will allow the investor to follow the evolution of his liabilities (commitments) and to avoid the depletion of reserves

Keywords : Strategic Asset Allocation, Asset Liability Management, Reserves, Surplus, Tolerance

Résumé

L'allocation stratégique d'actifs signifie dans la littérature économique la science qui cherche à créer un portefeuille qui permettra au propriétaire d'avoir le meilleur balancement entre le risque et le rendement, dans ce cas nous pouvons distinguer plusieurs approches : l'allocation stratégique d'actifs en discret, l'allocation stratégique en continue statique et l'allocation stratégique en continue dynamique. Dans ce document nous allons travailler sur la première approche, l'idée principale étant de partir d'un modèle d'optimisation de moyenne/variance classique, de l'appliquer à notre échantillon (dix actions, une obligation, des OCVM et un produit monétaire) et d'essayer de le développer à chaque fois en ajoutant des contraintes ou en remodelant la fonction objective, cette approche se base sur des notions telle que la duration, le surplus, la tolérance au risque...ETC pour assurer l'adossement du passif avec l'actif de l'investisseur, autrement dit il s'agit de construire le portefeuille qui permettra à l'investisseur de suivre l'évolution de son passif(engagements) et d'éviter l'épuisement des réserves.

Mots clés : Allocation stratégique d'actifs, gestion actif passif, réserves, surplus, tolérance.

Introduction

L'allocation stratégique d'actifs est une problématique complexe qui revêt une grande importance notamment pour les organismes financiers telle que les banque, les assurances et les organismes de retraite, en effet ces régimes s'exposent à plusieurs risques (risques de taux, risques financiers, risques de défaut, risque de longévité...), naturellement cela va impacter leur équilibre si nous ne sélectionnons pas le portefeuille adéquat, ce dernier permettra d'éviter des situations de sous financement caractérisées par un passif supérieur à l'actif ou un surplus négatif.

En résumé l'objectif de notre travaille est d'appliquer l'ensemble des modèles déterministes d'allocation stratégiques d'actifs à un portefeuille du marché marocain et d'étudier empiriquement l'apport de chacun d'entre eux, l'idée principale est donc de répondre à la problématique suivante : **quelles sont les caractéristiques de chaque modèle d'allocation et comment peuvent ils améliorer la gestion du surplus ?**

Dans ce travail, nous avons commencé par présenter succinctement les modèles d'allocation stratégique d'actifs, puis dans la deuxième partie nous avons appliqué à travers un cas concret l'ensemble de ces modèles l'exception du modèle de Leibowitz et ce en commentant à chaque fois les résultats obtenus.

1. Rappel théorique

1.1. Modèle de Markovitz

1.1.1. Hypothèses du modèle

Markovitz a été l'un des premiers économistes à proposer une méthode qui considère le portefeuille d'actifs dans son ensemble, alors qu'auparavant les investisseurs s'intéressaient à chaque titre individuellement, ce qui a profondément modifié les pratiques et les méthodes de l'époque. Markovitz a essayé d'aboutir au portefeuille efficient et non à l'efficience des marchés, en effet le portefeuille efficient selon Markovitz est celui qui maximise le rendement pour un risque donné ou inversement qui minimise le risque pour un rendement donné, l'ensemble des portefeuilles efficients vont former par la suite la frontière efficiente[1] de Markovitz, cette frontière constitue l'enveloppe convexe de tous les portefeuilles réalisables pour un investisseur.

Pour mettre sur pied son modèle, Markovitz s'est basé sur les hypothèses suivantes (Amenc & Le Sourd, 2003) :

- Les individus construisent leurs portefeuilles de façon à maximiser l'utilité espérée de leur richesse finale.
- La fonction d'utilité des individus est une fonction croissante de leur richesse et les individus sont averses au risque.
- Le rendement d'un actif est une variable aléatoire dont on fait l'hypothèse qu'elle suit une loi normale.[2]
- Les individus opèrent leurs choix en se basant uniquement sur les deux premiers moments de la distribution aléatoire de leur richesse, c'est-à-dire l'espérance et la variance[3].
- Tous les investisseurs ont le même horizon de décision qui comporte une seule période.

[1] Chaque investisseur utilise ses propres prévisions et estimations pour construire sa frontière efficiente, donc chaque investisseur aura sa propre frontière efficiente

[2] L'approche de Markovitz est dite approche moyenne variance puisque les individus opèrent leurs choix en se basant uniquement sur les deux premiers moments de la distribution, ils supposent donc la nullité des moments supérieurs et par conséquent la normalité de la distribution des rendements.

[3] Markovitz a proposé la variance pour modéliser l'incertitude pour des raisons pratiques, cependant les investisseurs ont une vision assez dissymétrique du risque, ils se préoccupe beaucoup plus du risque de baisse, pour ce faire plusieurs autres mesures peuvent être utilisées c'est le cas notamment de la semi-variance

1.1.2. Formulation mathématique du modèle

Un portefeuille est la combinaison linéaire de plusieurs actifs repartis en fonction de leur poids, le rendement et la variance de notre portefeuille peut être exprimé de la forme suivante :

$$E(Rp) = u^T X$$

$$VAR(Rp) = X^T Q X$$

X étant le vecteur des poids que nous allons chercher à optimiser, u étant le vecteur des rentabilités espérées des actifs et Q la matrice variance covariance des actifs.

L'expression de la variance met en évidence l'intérêt de la diversification dans la réduction du risque de notre portefeuille grâce aux corrélations entre les actifs et par conséquent dans la détermination du portefeuille optimal, pour ce faire markovitz a proposé une formulation mathématique qui nous permet de prendre en considération tout cela, ce modèle nous permet d'une part de définir la combinaison de tous les portefeuilles qui respectent le critère d'efficience et d'autre part vont nous permettre de construire la frontière efficiente. Dans sa formulation la plus simple, le modèle de Markovitz prend la forme suivante :

$$MIN\ X^T Q X$$

$$\text{Sous contraintes :} \begin{cases} e^T X = 1 \\ u^T X \geq b \end{cases}$$

b étant le rendement que nous désirons dépasser et e étant le vecteur unitaire.

Le problème de Markovitz est un problème convexe dans la mesure où la matrice Q est semi-définie positive puisque $X^T Q X$ représente la variance elle-même par définition strictement positive, le problème de Markovitz peut donc être résolu facilement par l'une des méthodes d'optimisation.

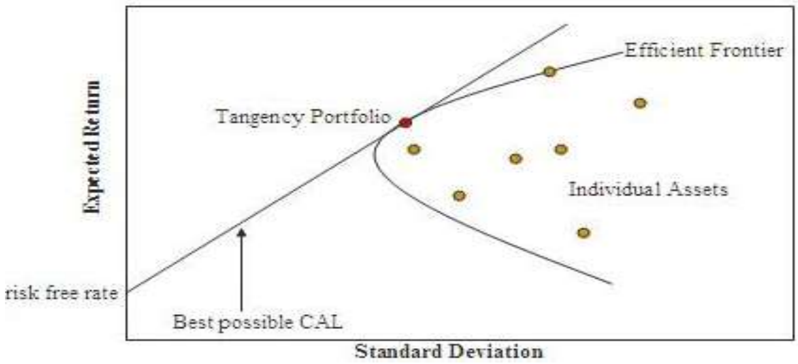
1.1.3. Prolongement du modèle : Optimisation du ratio de Sharpe

Le modèle proposé un peu plus haut est un modèle qui fait intervenir uniquement les actifs risqués, cependant l'expérience a démontré que les investisseurs sont beaucoup plus prudents et s'intéressent aussi à des actifs sans risque4 en plus des actifs jugés risqués.

[4] Un Actif sans risque est un titre dont les flux sont certains, avec un rendement dont l'écart-type est nul. En d'autres termes, l'émetteur d'un tel actif ne peut faire faillite. Les obligations d'Etat, en particulier si elles sont liées à des gouvernements stables économiquement et politiquement, sont généralement considérées comme un exemple d'actif sans risque. S'il subsiste tout de même un risque de défaut, celui-ci est jugé comme

Dans ce sens, le travail de sélection peut être divisé en deux taches, déterminer d'une part le poids du portefeuille à allouer aux actifs risqués (y) et puis consacrer la part restante du portefeuille (1-y) à l'actif sans risque en fonction de l'aversion au risque de l'investisseur, ce qui nous amène à la notion de la capital allocation line (CAL) , effectivement pour un portefeuille risqué donné, les différentes proportions allouées au portefeuille risqué et l'actif sans risque nous donne la CAL.

Figure 1 : Frontière efficiente et CAL[5]



Source : Capture d'écran du site Wikimédia

Le portefeuille marché dit aussi super efficient correspond à l'intersection de la frontière efficiente et la CAL tangente l'une par rapport à l'autre en ce même point (elle a la plus forte pente par rapport à toutes les autres CAL possibles), dans ce sens, la CAL tangente a des caractéristiques qui sont très intéressantes dans la mesure ou pour chaque niveau de risque, le point de cette tangente propose un meilleur rendement que celui de la frontière efficiente. La CAL tangente peut être modélisée à travers une équation de type :

$$y = r_f + \theta * x$$

Avec y les rendements espérés du portefeuille, x l'écart type correspondant, r_f le rendement de l'actif sans risque et θ étant le ratio de Sharpe[6].

Pour trouver le portefeuille marché, il suffit de maximiser le ratio de Sharpe, mathématiquement parlant ce modèle d'optimisation se présente sous la forme suivante :

$$MAX \frac{U^T X - rf}{(X^T Q X)^2}$$

suffisamment minime pour que ces obligations puissent servir de référence dans le marché. La récente crise des dettes souveraines en Europe a toutefois montré que toutes les obligations d'Etat ne pouvaient être considérées sans risque.

[6] Sharpe=$\frac{E(Rp)-rf}{\sigma(Rp)}$

$$\text{Sous contraintes : } \begin{cases} e^T X = 1 \\ u^T X \geq b \end{cases}$$

$\frac{U^T X - rf}{(X^T Q X)^2}$ Étant la forme matricielle du ratio de Sharpe.

1.2. Modèle de Sharpe et Tint

Le modèle de base théorique de la gestion actif-passif a été posé (Sharpe & Tint , 1990) en effet, ils étaient l'un des premiers à concilier le modèle de Markovitz avec le passif, ils avaient remarqué que les engagements étaient les plus contraignants et il fallait les prendre en considération dans la gestion actif-passif lorsqu'on détermine le portefeuille efficient, pour ce faire, ils vont introduire la notion du surplus[7] et vont chercher l'optimiser.

Sharpe et tint vont resteront dans la même optique que Markovitz et vont s'inspireront de ses travaux en utilisant la même approche moyenne-variance mais leurs résultats seront assez différents dans la mesure où, ils vont prendré en considération le passif de l'investisseur.

1.2.1. Hypothèses du modèle

- $\widetilde{R_L}$: suit une loi normale multivariée d'espérance μ_L et de variance ${\sigma_L}^2$, avec $\widetilde{R_L} = \frac{\widetilde{L_1} - L_0}{L_0}$ et L_0 étant la valeur initiale du passif ou des engagements et $\widetilde{L_1}$ la même valeur mais à l'instant t=1
- $\tilde{R}$: suit une loi normale multivarié d'espérance $\mu = E\begin{bmatrix} \widetilde{R_1} \\ \vdots \\ \widetilde{R_n} \end{bmatrix}$ et de variance V avec $\widetilde{R_A}(x)$ le rendement du portefeuille des actifs et avec $\widetilde{R_A}(x) = X^T \tilde{R}$

1.2.2. Formulation mathématique du modèle

Le modèle de Sharpe et Tint s'applique à un univers de classes d'actifs, ce modèle se base sur sa valeur de marché tandis que le modèle du passif se base sur sa valeur actuelle, c'est un modèle mono-périodique qui cherche à minimiser la variance du surplus pour un niveau de rentabilité du surplus donné et sous quelques contraintes (en générale c'est la même démarche que Markovitz)

Le programme d'optimisation de Sharpe et Tint prendra la formulation suivante :

[7] Le surplus étant la différence entre la valeur de l'actif et le produit de la valeur des engagements par un poids

$$MIN\ VAR(\widetilde{R_S})$$

Sous contraintes : $\begin{cases} E(\widetilde{R_S}) = r_s \\ \sum x_i = 1 \end{cases}$

Avec $\widetilde{R_S} = \widetilde{R_A}\,(x) - \frac{m}{f_0}\widetilde{R_L} = \frac{S_1 - S_0}{A_O}$, $f_0 = \frac{L_0}{A_O}$ (ratio de financement initial), $S_0 = A_O - mL_0$(m étant le poids du passif) et $S_1 = A_O(1 + \widetilde{R_A}\,(x)) - mL_0(1 + \widetilde{R_L})$

Sous forme matricielle, la variance de la rentabilité du surplus prend la forme suivante :

$$VAR(\widetilde{R_S}) = VAR\left(\widetilde{R_A}\,(x) - \frac{m}{f_0}\widetilde{R_L}\right) = X^T VX + \frac{m^2}{f_0^2} VAR(\widetilde{R_L}) - \frac{2m}{f_0} X^T \gamma$$

$$\text{Avec } \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} COV(\widetilde{R_1}, \widetilde{R_L}) \\ \vdots \\ COV(\widetilde{R_n}, \widetilde{R_L}) \end{pmatrix}$$

Sachant que le terme $\frac{m^2}{f_0^2} VAR(\widetilde{R_L})$ ne dépend pas du poids des actifs, donc le programme d'optimisation de Sharpe et Tint sous sa forme matricielle prend la forme suivante :

$$MIN\ X^T VX - \frac{m}{f_0} X^T \gamma$$

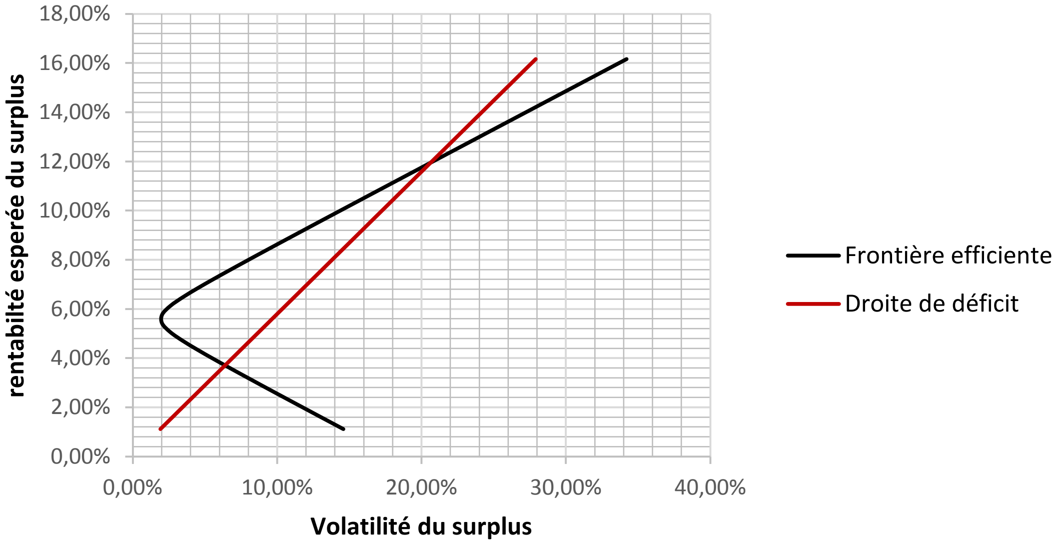
Sous contraintes : $\begin{cases} X^T \mu = \tilde{r} \\ X^T e = 1 \end{cases}$

$$\boldsymbol{Avec}\ \tilde{r} = r_s + \frac{m}{f_0}\mu_L$$

L'ensemble des portefeuilles qui vont respecter ces contraintes et optimiser ce programme constitue une hyperbole et la partie supérieure de cette dernière constitue la aussi ce que nous appelons frontière efficiente de Sharpe et Tint.[8]

[8] Dans leur modèle, Sharpe et Tint prennent aussi en considération une contrainte de déficit qui correspond à la probabilité que le ratio de financement ne dépasse pas un seuil initial et ce en supposant la normalité de la distribution des rentabilités du surplus, dans notre document nous avons écarté cette partie dans la mesure ou notre application ne va pas prendre en considération cette contrainte.

Figure 2 : Frontière efficiente et contrainte de déficit (Sharpe et Tint)



Source : Elaboré par l'auteur

1.3. Modèle de Leibowitz

Développé par Martin Leibowitz et son équipe au sein de la banque Salomon Brothers (Leibowitz, et al., 1992), c'est un modèle qui s'applique à un portefeuille reparti entre une composante action et une composante obligataire, à travers son modèle, Leibowitz cherche à déterminer le portefeuille(pourcentage d'action et duration de la composante obligataire) qui vont maximiser le rendement du surplus du portefeuille et ce tout en respectant les contraintes sur l'actif et le passif, ces contraintes sont modélisées en probabilité et exprimées soit en valeur actuelle ou en valeur marché.

1.3.1. Hypothèses et notations du modèle

- [9]$\widetilde{R_p}$ Suit une loi normale d'espérance $\overline{R_P}$ et de variance σ_p^2 .
- [10]$\widetilde{R_A}$ Suit une loi normale d'espérance $\overline{R_A}$ et de variance σ_A^2 .
- [11]$\widetilde{R_O}$ Suit une loi normale d'espérance $\overline{R_O}$ et de variance σ_O^2 .
- L'actif obligataire est parfaitement adossé au passif, ce qui revient à dire que ρ_{op}=1 (corrélation entre l'actif obligataire et le passif).

[9] $\widetilde{R_p}$ Représente la variation actuelle des engagements, elle est appelée aussi croissance du passif
[10] $\widetilde{R_A}$Représente le rendement de l'actif de type action
[11] $\widetilde{R_0}$Représente le rendement de l'actif de type obligataire

- La volatilité de l'actif obligataire est proportionnelle à sa duration[12] $\sigma_0 = D_0 * \sigma_{taux1an}$.
- Les obligations de toutes les maturités fournissent le même rendement.
- [13]$\widetilde{R_{pf}} = \alpha\widetilde{R_A} + (1-\alpha)\widetilde{R_O} = \frac{\widetilde{A_1}-\widetilde{A_0}}{\widetilde{A_0}}$.
- [14]$\widetilde{R_S} = \frac{\widetilde{S_1}-\widetilde{S_0}}{\widetilde{P_0}} = \varphi\ \widetilde{R_{pf}} - \widetilde{R_p}$ Avec [15]$\widetilde{S_1} = \widetilde{A_1} - \widetilde{P_1}$; $S_0 = A_0 - P_0$; [16]$\varphi = \frac{A_0}{P_0}$.
- L'actif est évalué en valeur marché tandis que le passif est évalué en valeur actuelle.

1.3.2. Formulation mathématique du modèle

Hormis le fait qu'il ne prend en considération que deux actifs, le modèle de Leibowitz développe une démarché très précise dans la mesure où, il nous permet d'une part de prendre en considération les engagements de l'organisme (le principal atout et c'est le cas aussi de Sharpe et Tint), d'autre part en plus de déterminer la proportion d'actions à détenir dans le portefeuille, il nous permet de déterminer la duration optimale de la composante obligataire à détenir dans notre portefeuille.

Le programme d'optimisation de Leibowitz revêt la forme suivante :

$$MAX\ (\overline{R_S})$$

$$\text{Sous contraintes :} \begin{cases} P(\widetilde{R_S} < u) < p & (1) \\ P(\widetilde{R_{pf}} < u') < p' & (2) \end{cases}$$

Dans la mesure où nous avons supposé au début que $\widetilde{R_p}, \widetilde{R_A}, \widetilde{R_0}$ sont tous normalement distribués, par [17]conséquent $\widetilde{R_S} \sim N(\overline{R_S}, \sigma_S)$ et la courbe qui va décrire la première contrainte prendra la forme suivante : $\overline{R_S} = u - q_p^{N(0,1)} * \sigma_S$.

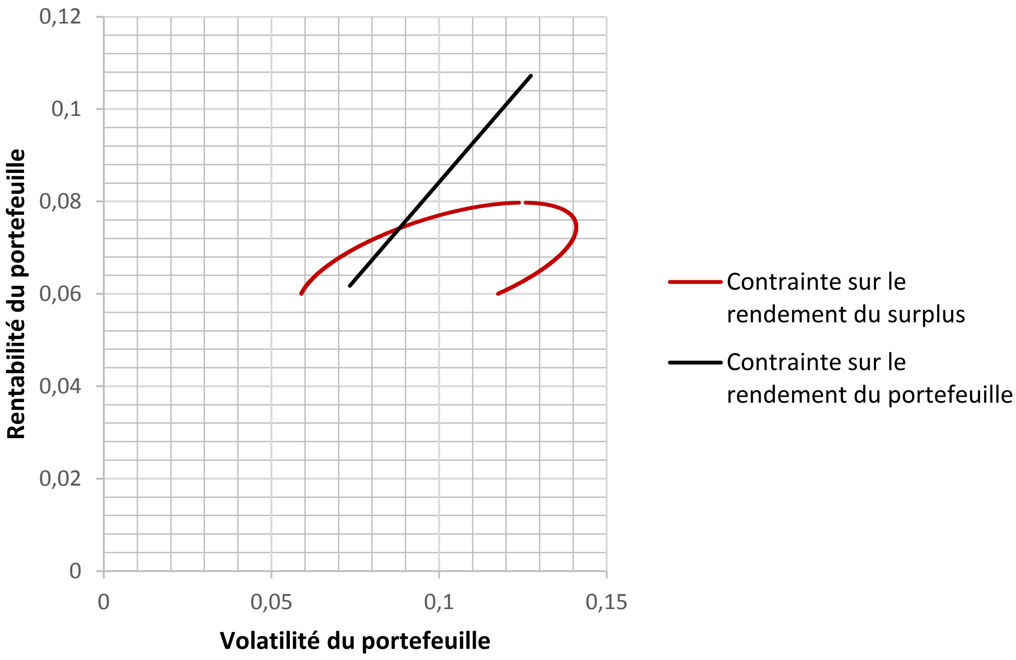
---

[12] La duration correspond à l'élasticité prix de l'obligation par rapport aux variations dans les taux d'intérêt
[13] $\widetilde{R_{pf}}$ Représente le portefeuille d'actifs et α la proportion de la composante action à détenir dans le portefeuille
[14] $\widetilde{R_S}$Représente le rendement du surplus
[15] $\widetilde{S_1}$ Représente le surplus à l'instant t=1
[16] φ Correspond au ratio de financement initial
[17] Toute combinaison linéaire de deux variables normalement distribuées est une variable qui est normalement distribuée

Pour la deuxième contrainte et de la même manière que la première, la courbe qui va la définir prendra la forme suivante :

$$\overline{R_{pf}} = u' - q_{p'}^{N(0,1)} * \sigma_{pf}$$

Figure 3 : Représentation graphique du programme d'optimisation de Leibowitz



Source : Elaboré par l'auteur

Le portefeuille optimal correspond à l'intersection des deux contraintes, ce portefeuille a un rendement noté $\overline{R_{pf}}^*$ et une volatilité σ_{pf}^*, par conséquent la proportion optimale α^*à investir dans la composante action correspond à $\frac{\overline{R_{pf}}^* - \overline{R_O}}{\overline{R_A} - \overline{R_O}}$ et la volatilité de la composante obligataire de notre portefeuille optimal correspond à :

$$\sigma_O^* = \frac{-\alpha^* \sigma_A + \sqrt{{\alpha^*}^2 \sigma_A 2(\rho^2 - 1) + {\sigma_{pf}^*}^2}}{1 - \alpha^*}$$

- Remarque

Le modèle de [18]Leibowitz se limite à une composante action et une composante obligataire ce qui limite énormément son champ d'application. Au niveau de notre travail, nous avons sciemment sauté ce modèle vu que notre portefeuille contient plus d'une action et d'une obligation.

[18] La lecture du modèle de Leibowitz est primordiale dans la mesure où ce modèle a inspiré plusieurs auteurs c'est le cas notamment du modèle de Talfi que nous allons essayer d'appliquer dans ce travail

1.4. Modèle de Talfi

Talfi dans sa thèse intitulée « **organisation des systèmes de retraites et modélisation des fonds de pension** » va continuer dans le même sens que les modèles précédents, il va s'inspirer des travaux de Leibowitz et de Sharpe/Tint et va proposer un modèle un peu plus complet. Talfi va utiliser une approche moyenne variance qui modélise l'actif et le passif (comme initié par Sharp/Tint) avec des investissements uniquement en une composante action et une composante obligataire (comme initié par Leibowitz), Talfi ajoute à sa fonction d'optimisation le paramètre de tolérance au risque, ce qui rend son modèle très intéressant.

1.4.1. Hypothèses

- Le marché est supposé complet (toutes les options sont réplicables à travers des stratégies financières)
- X_0 représente la valeur du portefeuille après règlement des pensions dues à t=0
- $\widetilde{X_H}$ représente la valeur du portefeuille avant règlement des pensions dues à t=H
- Le groupe d'assurés(pensionnés) est supposé fermé et la population est supposée constante sans mortalité sur la période d'étude
- Le régime ne paye de pension qu'a échéance t=H
- Seul le marché influence sur la valeur du passif de l'organisme et le marché est supposé complet

1.4.2. Formulation mathématique du modèle

Comme mentionné un peu plus haut, le modèle de Talfi s'inspire en partie des travaux de Leibowitz et de Sharpe/Tint, il s'agit d'une part de maximiser l'espérance de la rentabilité du surplus et d'autre part de minimiser la variance de la rentabilité du surplus rapportée au coefficient de tolérance au risque de l'investisseur, mathématiquement parlant, le problème de Talfi se présente comme suit :

$$MAX\ E(\tilde{R}_S) - \frac{VAR(\tilde{R}_S)}{tol}$$

Le paramètre tol est un paramètre qui va nous permettre de mesurer l'aversion au risque de l'investisseur. Plus la tolérance est importante, plus l'investisseur choisira des actifs risqués, dans le cas contraire l'investisseur sera beaucoup plus prudent et privilégiera les actifs un peu moins risqués.

Avec $\tilde{S}_H = \widetilde{X_H} - m\tilde{L}_H$=la valeur du surplus à l'instant t=H, m correspond au poids du passif et $\tilde{L}_H$ correspond à la valeur des engagements à l'instant t=H.

Sachant que le rendement du surplus s'écrit de la forme suivante : $\widetilde{R_S} = \frac{\widetilde{S_H} - \widetilde{S_0}}{L_0} = \varphi\ \widetilde{R_X} - m\widetilde{R_L}$, donc en éliminant les paramètres qui ne dépendent pas du poids des actifs de notre portefeuille, nous nous retrouvons avec le programme d'optimisation suivant :

$$MAX\ \varphi E(\tilde{R}_X) - \varphi^2 \frac{VAR(\tilde{R}_X)}{tol} + \frac{2m\varphi}{tol} COV(\tilde{R}_X, \tilde{r})$$

Nous pouvons faire les remarques suivantes :

- Le terme $\frac{2m\varphi}{tol} COV\ (\tilde{R}_X, \tilde{r})$ de notre programme d'optimisation est appelée Liability Hedging Credit, il correspond à la couverture du portefeuille contre les risques du passif, nous pouvons dire qu'il y a une relation positive entre corrélation actif/passif et couverture contre les risques du passif dans la mesure ou plus cette corrélation est importante, plus l'actif constitue une bonne couverture contre les risques du passif.
- Le modèle de Talfi est un modèle très intéressant dans puisqu'il permet d'ajouter le paramètre temps ainsi que la tolérance au risque, en plus de cela, Talfi a proposé une méthodologie bien détaillée qui peut nous permettre d'appliquer ce modèle sur un horizon du temps à travers cas pratique.

2. Résultat et analyse d'une étude de cas

L'objectif de cette partie est d'appliquer l'ensemble des modèles que nous venons de voir un peu plus haut à travers un cas concret issu du marché marocain, pour ce faire nous allons étudier le marché boursier à travers dix[19] actions cotées à la place casablancaise[20], le marché obligataire[21] à travers le taux moyen pondéré des émissions du trésor[22] pour une maturité de deux ans, le marché monétaire à travers le taux moyen pondéré du marché interbancaire, et

[20] Les données boursières sont téléchargées depuis le site de la CDG bourse
[21] Les données du marché obligataire sont téléchargées depuis le site de Bank Al Maghrib
[22] Les données du marché monétaire sont téléchargées depuis le site de Bank Al Maghrib

puis [23] l'OPCVM monétaire, l'OPCVM actions, l'OPCVM diversifié et l'OPCVM obligataire. Notre étude s'étale sur une période à peu près de trois ans (du 01/04/2015 au 01/01/2018), ainsi les rendements et les volatilités annualisées de nos actifs sur la période d'étude se présentent comme suit :

Tableau 1:Rendement et volatilité annualisée de nos actifs

	Rendement annualisé	Volatilité annualisée
S.M MONETIQUE	18,67%	18,23%
ALLIANCE	30,65%	78,05%
ATTIJARIWAFA BANK	10,57%	13,06%
DOUJA PROM	1,37%	30,13%
ITISSALAT AL-MAGHRIB	0,27%	17,31%
LESIEUR CRISTAL	24,65%	13,31%
LAFARGEHOLCIM MAROC	2,60%	26,38%
ATLANTA	-2,20%	16,19%
BCP	10,73%	15,00%
COSUMAR	53,02%	25,37%
Marché monétaire interbancaire	2,31%	0,42%
TMP des émissions du tresor 2 ans	2,55%	0,68%
OPCVM MONETAIRE	3,41%	2,03%
OPCVM ACTIONS	6,99%	11,17%
OPCVM DIVERSIFIE	7,90%	6,64%
OPCVM OBLIGATAIRE	3,27%	1,54%

Source : Elaboré par l'auteur

- Remarque

Nous nous sommes limité à dix actions par soucis méthodologique, en effet toutes les actions n'ont pas les mêmes dates de cotation, ce qui nous a poussé à sélectionner les actions dont les dates de cotation coïncident au jour le jour, remarquons aussi que nous aurions pu travailler avec un benchmark à la place de notre échantillon telle que le MASI ou le MADEX, néanmoins nous avons choisi de nous mettre à la place d'un investisseur et d'observer le comportement de chaque modèle face à des actions qui ont des caractéristiques différentes, dans ce cas nous pouvons ne pas nous souciller de la représentativité de l'échantillon, dans la mesure où chaque optimisateur choisira uniquement les actions les plus performantes en terme de rendement/volatilité.

[23] Les données sur les OPCVM sont aussi téléchargées depuis le site de la CDG bourse

Ainsi la matrice Variance covariance mensuelle de nos actifs que nous allons utiliser pour travailler nos modèles d'optimisation se présente comme suit :

Tableau 2 : Matrice VAR/COV mensuelle de nos actifs

	S.M MONETIQUE	ALLIANCE	ATTIJARIWAFA BANK	DOUJA PROM	ITISSALAT AL-MAGHRIB	LESIEUR CRISTAL	LAFARGEHOL CIM MAROC	ATLANTA	BCP	COSUMAR	Marché monétaire interbancaire	TMP des émissions du tresor 2 ans	OPCVM MONETAIRE	OPCVM ACTIONS	OPCVM DIVERSIFIE	OPCVM OBLIGATAIRE
S.M MONETIQUE	0,002769231	0,000735054	9,26096E-05	0,001366235	0,00014177	0,00025007	0,000881101	0,000235917	0,00040007	0,000214485	6,82834E-06	-7,75674E-06	9,95664E-05	0,000313933	0,000278473	5,41752E-05
ALLIANCE	0,000735054	0,050767092	0,00180006	0,009064145	0,002491888	-0,00043403	0,002923871	0,000430495	0,00071175	0,002449792	1,27382E-05	-9,23759E-05	8,20748E-05	-7,0988E-05	0,000531489	3,32866E-05
ATTIJARIWAFA BANK	9,26096E-05	0,00180006	0,001420307	0,000738831	0,000890238	0,00020893	0,001120095	0,000225579	0,00071761	0,000497424	-6,54191E-06	-2,41753E-05	5,29266E-05	0,000518482	0,000369747	4,40971E-05
DOUJA PROM	0,001366235	0,009064145	0,000738831	0,007566388	0,002439246	0,0007419	0,002852568	0,00019759	0,0018449	0,002708637	5,36322E-06	-2,3388E-05	7,51197E-05	0,001369033	0,00103569	4,10658E-05
ITISSALAT AL-MAGHRIB	0,00014177	0,002491888	0,000890238	0,002439246	0,002497465	0,00095555	0,001762545	-0,000151529	0,00108313	0,001358313	-3,39151E-06	-3,29214E-05	4,16744E-05	0,000864833	0,000575652	2,72987E-05
LESIEUR CRISTAL	0,000250073	-0,000434033	0,000208928	0,0007419	0,000955547	0,00147641	0,000199097	7,33599E-05	0,00057378	0,001305195	3,6593E-06	-1,24507E-05	-1,2879E-05	0,000548307	0,000316036	2,49745E-05
LAFARGEHOLCIM MAROC	0,000881101	0,002923871	0,001120095	0,002852568	0,001762545	0,0001991	0,005799821	0,00016242	0,00116175	0,00070061	-9,6256E-06	-3,33601E-05	0,000120122	0,001074033	0,000774739	5,92675E-05
ATLANTA	0,000235917	0,000430495	0,000225579	0,00019759	-0,000151529	7,336E-05	0,00016242	0,002183987	0,00013672	-0,000205001	-1,56993E-05	-2,3203E-05	7,51404E-06	0,000177092	4,10692E-05	6,05556E-06
BCP	0,000400072	0,000711748	0,000717606	0,001844895	0,001083132	0,00057378	0,001161754	0,000136718	0,00187477	0,001678837	-2,76353E-06	-1,93558E-05	-1,36209E-05	0,000819713	0,000577785	-7,07746E-06
COSUMAR	0,000214485	0,002449792	0,000497424	0,002708637	0,001358313	0,00130519	0,00070061	-0,000205001	0,00167884	0,005362428	-1,22727E-05	-3,83524E-05	-0,000101248	0,001486788	0,000709375	-4,92013E-05
Marché monétaire interbancaire	6,82834E-06	1,27382E-05	-6,54191E-06	5,36322E-06	-3,39151E-06	3,6593E-06	-9,6256E-06	-1,56993E-05	-2,7635E-06	-1,22727E-05	1,44264E-06	1,7765E-06	1,18767E-06	-1,2042E-05	-3,70184E-06	6,96329E-07
TMP des émissions du tresor 2 ans	-7,75674E-06	-9,23759E-05	-2,41753E-05	-2,3388E-05	-3,29214E-05	-1,2451E-05	-3,33601E-05	-2,3203E-05	-1,9356E-05	-3,83524E-05	1,7765E-06	3,90672E-06	-7,93303E-07	-2,3968E-05	-1,14427E-05	-1,00894E-06
OPCVM MONETAIRE	9,95664E-05	8,20748E-05	5,29266E-05	7,51197E-05	4,16744E-05	-1,2879E-05	0,000120122	7,51404E-06	-1,3621E-05	-0,000101248	1,18767E-06	-7,93303E-07	3,43903E-05	-2,053E-05	2,95589E-06	2,24454E-05
OPCVM ACTIONS	0,000313933	-7,09881E-05	0,000518482	0,001369033	0,000864833	0,00054831	0,001074033	0,000177092	0,00081971	0,001486788	-1,20422E-05	-2,39681E-05	-2,05302E-05	0,001040633	0,000561566	-1,391E-05
OPCVM DIVERSIFIE	0,000278473	0,000531489	0,000369747	0,00103569	0,000575652	0,00031604	0,000774739	4,10692E-05	0,00057778	0,000709375	-3,70184E-06	-1,14427E-05	2,95589E-06	0,000561566	0,000367392	4,67306E-06
OPCVM OBLIGATAIRE	5,41752E-05	3,32866E-05	4,40971E-05	4,10658E-05	2,72987E-05	2,4975E-05	5,92675E-05	6,05556E-06	-7,0775E-06	-4,92013E-05	6,96329E-07	-1,00894E-06	2,24454E-05	-1,391E-05	4,67306E-06	1,98498E-05

Source : Elaboré par l'auteur

Pour la corrélation de l'actifs avec le passif, nous allons supposer qu'elle est de l'ordre de 50%, effectivement les variations de notre actif ne couvrent pas à 100% les variations de notre passif et sa duration ne correspond pas à la duration du passif, ce qui nous pousse à supposer que la corrélation n'est pas de 100%.

Pour rester dans une optique de comparaison et pour rester le plus proche possible de la réalité, nous allons imposer à nos modèles d'optimisation des contraintes qui seront à la fois techniques et réglementaires, pour le premier type de contraintes il correspond à des seuils de rendement que nous allons imposer à nos modèles dans la mesure ou la majorité des modèles étudiés dans ce document cherchent à optimiser la variance, pour les contraintes réglementaires, nous allons prendre comme exemple la charte d'investissement qui a été imposée par le ministère des finances à la Caisse marocaine des retraites en 2014, cette charte d'investissement se présente comme suit :

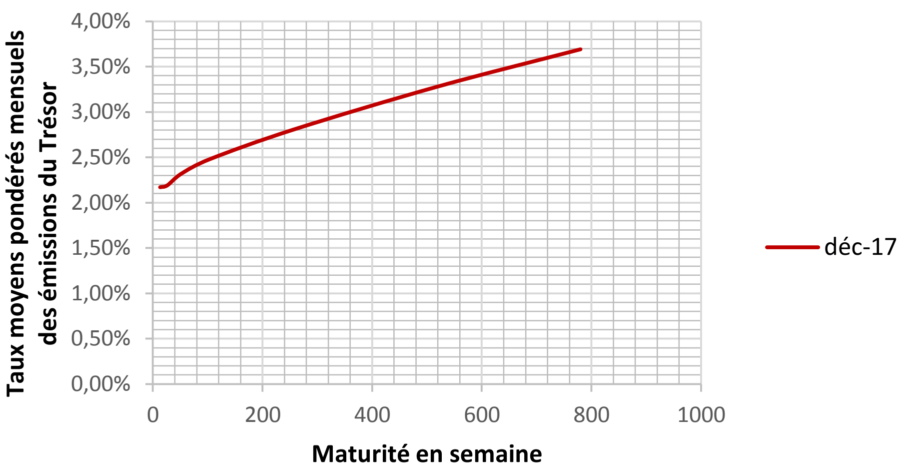
Tableau 3 : AL MALIYA n°54 avril 2014

CLASSES D'ACTIFS	VALEURS CONSTITUTIVES DES CLASSES D'ACTIFS	LIMITES
I	Valeurs de l'Etat, valeurs jouissant de la garantie de l'Etat et OPCVM investis exclusivement en valeurs émises ou garanties par l'Etat.	50% au min
II	Obligations cotées, obligations ayant reçu le visa du CDVM, certificats de dépôts, bons de sociétés de financement, billets de trésorerie, OPCVM obligataires et monétaires.	15% au max
III	Actions cotées, OPCVM « actions » et « diversifiés », Fonds de Capital-risque et Fonds de titrisation.	30% au max
IV	Terrain, immeubles et parts et actions de sociétés investissant en immobilier.	5% au max

Source : Elaboré par le ministère des finances au profit de la CMR

Pour étudier le ratio de Sharpe[24] des portefeuilles obtenus, nous allons nous référer à la courbe des taux de décembre 2017, cette courbe se présente comme suit :

Figure 4 : courbe des taux de décembre 2017



Source : Elaborée par l'auteur

Donc pour l'actif sans risque, nous utiliserons le bon de trésor à 13 semaines, ce qui est équivalent à un rendement de 2,17%

[24] Le ratio de Sharpe est un excellent indicateur dans la mesure ou il va nous permettre de jauger les performances des portefeuilles que nous allons obtenir, en effet si 0<Sharpe<1 cela veut dire que le rendement du portefeuille est obtenu pour un prix du risque qui est excessif, dans le cas contraire si Sharpe>=1 cela veut dire que le rendement du portefeuille est obtenu pour un prix du risque qui est inférieur ou au minimum égale

2.1. Portefeuille à variance minimale de Markovitz

2.1.1. Programme d'Optimisation de Markowitz

Le programme d'optimisation de Markovitz sous sa forme matricielle comme mentionné au niveau de la partie pratique se présente comme suit :

$$MIN\ X^T Q X$$

$$\text{S/C}\ \ e^T X = 1\ ,\ U^T X = b$$

2.1.2. Cordonnées et performance du portefeuille à variance minimale de Markovitz sans prendre en considération les contraintes imposées par le ministère des finances

		S.M MONETIQUE	ALLIANCE	ATTIJARI WAFA BANK	DOUJA PROM	ITISSALAT AL-MAGHRIB	LESIEUR CRISTAL	LAFARGEHOLCIM MAROC	ATLANTA	BCP	COSUMAR	Marché monétaire interbancaire	TMP des émissions du tresor 2 ans	OPCVM MONETAIRE	OPCVM ACTIONS	OPCVM DIVERSIFIE	OPCVM OBLIGATAIRE
r/ans		0,18669851	0,30647943	0,10569697	0,013722126	0,00273411	0,246491764	0,025974026	-0,02199327	0,107328794	0,530228542	0,023136096	0,025454545	0,034095369	0,06992973	0,07900206	0,032730705
	x	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,47	0,30	0,07	0,02	0,00	0,14
	objective	1,93203E-06															
	r annualisé	2,73%															
	volatilité annualisée	0,48%															
markovitz min var	Sharpe	1,153665775															

2.1.3. Cordonnées et performance du portefeuille à variance minimale de Markovitz avec contraintes du ministère des finances

		S.M MONETIQUE	ALLIANCE	ATTIJARI WAFA BANK	DOUJA PROM	ITISSALAT AL-MAGHRIB	LESIEUR CRISTAL	LAFARGEHOLCIM MAROC	ATLANTA	BCP	COSUMAR	Marché monétaire interbancaire	TMP des émissions du tresor 2 ans	OPCVM MONETAIRE	OPCVM ACTIONS	OPCVM DIVERSIFIE	OPCVM OBLIGATAIRE
r/ans		0,18669851	0,30647943	0,10569697	0,013722126	0,00273411	0,246491764	0,025974026	-0,02199327	0,107328794	0,530228542	0,023136096	0,025454545	0,034095369	0,06992973	0,07900206	0,032730705
	x	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,19	0,60	0,07	0,00	0,05	0,08
	objective	2,51032E-06															
	r annualisé	2,93%															
	volatilité annualisée	0,54885%															
	Contrainte 1	0,598325271															
markovitz min var avec contraintes	Contrainte 2	0,15															
imposées par le ministère des	Contrainte 3	0,063250574															
finances	Sharpe	1,392067784															

Le premier portefeuille présente une rentabilité et une volatilité inferieure à celle du deuxième portefeuille, cela est logique dans la mesure où l'optimisateur de Markovitz dans le premier cas cherche le portefeuille le moins risqué dans l'univers des combinaisons possibles, alors que dans le deuxième cas, l'optimisateur doit respecter les contraintes imposées, cependant, nous pouvons dire que le premier portefeuille est moins performant que le deuxième puisqu'il génère un ratio Sharpe qui est inférieur.

Les deux portefeuilles choisissent essentiellement les valeurs les moins risquées à quelques différences près (obligations, monétaire, OPCVM obligataire et OPCVM monétaire), remarquons aussi que l'optimisateur dans les deux cas consacre 1% du portefeuille à l'action ATLANTA, même si elle dégage un rendement négatif, ce qui signifie que cette action présente des caractéristiques de diversification très intéressantes.

2.1.4. Cordonnées et performance du portefeuille à variance minimale de Markovitz avec contrainte d'investissement (r=10%) et sans contraintes du ministère des finances

		S.M MONETIQUE	ALLIANCE	ATTIJARI WAFA BANK	DOUJA PROM	ITISSALAT AL-MAGHRIB	LESIEUR CRISTAL	LAFARGEHOLCIM MAROC	ATLANTA	BCP	COSUMAR	Marché monétaire interbancaire	TMP des émissions du tresor 2 ans	OPCVM MONETAIRE	OPCVM ACTIONS	OPCVM DIVERSIFIE	OPCVM OBLIGATAIRE
r/ans		0,18669851	0,30647943	0,10569697	0,013722126	0,00273411	0,246491764	0,025974026	-0,02199327	0,107328794	0,530228542	0,023136096	0,025454545	0,034095369	0,06992973	0,07900206	0,032730705
markovitz min var	x	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08	0,00	0,00	0,00	0,09	0,00	0,42	0,36	0,00	0,00	0,00
	objective	7,95054E-05															
	r annualisé	10,00%															
	volatilité annualisée	3,09%															
	Sharpe	2,534969537															

2.1.5. Cordonnées et performance du portefeuille à variance minimale de Markovitz avec contrainte d'investissement (r=10%) et avec contraintes du ministère des finances

		S.M MONETIQUE	ALLIANCE	ATTIJARI WAFA BANK	DOUJA PROM	ITISSALAT AL-MAGHRIB	LESIEUR CRISTAL	LAFARGEHOLCIM MAROC	ATLANTA	BCP	COSUMAR	Marché monétaire interbancaire	TMP des émissions du tresor 2 ans	OPCVM MONETAIRE	OPCVM ACTIONS	OPCVM DIVERSIFIE	OPCVM OBLIGATAIRE
r/ans		0,18669851	0,30647943	0,10569697	0,013722126	0,00273411	0,246491764	0,025974026	-0,02199327	0,107328794	0,530228542	0,023136096	0,025454545	0,034095369	0,06992973	0,07900206	0,032730705
markovitz min var avec contraintes imposées par le ministère des finances	x	0,05	0,00	0,02	0,00	0,00	0,09	0,00	0,00	0,00	0,09	0,00	0,61	0,15	0,00	0,00	0,00
	objective	8,08588E-05															
	r annualisé	10,00%															
	volatilité annualisée	3,11497%															
	Contrainte 1	0,609020273															
	Contrainte 2	0,15															
	Contrainte 3	0,240979789															
	Sharpe	2,513665123															

A ce niveau, l'optimisateur cherche à investir d'avantage dans les valeurs risquées tout en gardant à l'esprit la minimisation de la variance, ici l'optimisateur investit plus au moins 23% du portefeuille en actions alors qu'au début, l'optimisateur n'a pas du tout investit en actions, en contrepartie et dans les deux cas, l'investissement dans le monétaire est réduit à zéro, ce dernier est remplacé par l'obligataire (l'obligation rapporte dans notre cas un rendement rapporté au risque qui est plus intéressant) et l'OPCVM monétaire.

En conclusion avec une rentabilité annuelle de 10%, l'optimisateur avec ou sans contrainte réglementaire a la même tendance de comportement, remarquons que dans les deux cas, l'optimisateur a abandonné l'action ATLANTA dans la mesure ou la diversification qu'elle rapporte n'est aussi attirante au regard du rendement que nous lui avons imposé, d'autre part nous pouvons remarquer que le premier portefeuille (sans contrainte réglementaire) est plus performant et présente un ratio Sharp sensiblement plus élevé, donc nous pouvons dire que la contrainte règlementaire dans ce cas a légèrement pénalisé notre deuxième portefeuille.

2.1.6. Portefeuille de Markovitz pour une rentabilité de 20%[25]

Tableau 4 : Comparaison des poids obtenus par le mod7le de Markovitz avec et sans contraintes réglementaires pour un r=20%

r=20%	Portefeuille de Markovitz sans contrainte réglementaire	Portefeuille de Markovitz avec contrainte réglementaire
	Poids	
S.M MONETIQUE	10,23%	0,00%
ALLIANCE	0,40%	0,00%
ATTIJARIWAFA BANK	1,00%	0,00%
DOUJA PROM	0,00%	0,00%
ITISSALAT AL-MAGHRIB	0,00%	0,00%
LESIEUR CRISTAL	20,30%	0,00%
LAFARGEHOLCIM MAROC	0,00%	0,00%
ATLANTA	0,00%	0,00%
BCP	0,00%	0,00%
COSUMAR	21,24%	34,32%
Marché monétaire interbancaire	0,00%	0,00%
TMP des émissions du trésor 2 ans	0,00%	50,68%
OPCVM MONETAIRE	46,83%	15,00%
OPCVM ACTIONS	0,00%	0,00%
OPCVM DIVERSIFIE	0,00%	0,00%
OPCVM OBLIGATAIRE	0,00%	0,00%
Sharpe	**2,380348792**	**2,084692783**

Source : Elaborée par l'auteur

A ce niveau, trois remarques méritent d'etre mentionnées, premièrement la contrainte réglementaire sur les actions se sature au niveau du deuxieme portefeuille, dans ce cas notre

[25] Le fait d'étudier une rentabilité qui est de l'ordre de 20% est un exercice purement théorique, il est clair que ce rendement est très exagéré

problème n'aura plus de solution, deuxièmement l'otpmisateur cherche à investir encore plus dans les actifs risqués qui dégagent beaucoup de rendement (c'est ce qui explique la saturation de la contrainte au niveau du deuxième problème) et troisièmement le ratio de Sharpe pour un r=20% dans les deux cas commence à baisser (par rapport à un r=20%) ce qui signifie que le surplus de rendement dégagé se fait en contrepartie d'une prise de risque excessive.

2.2. Portefeuille marché de Markovitz

2.2.1. Programme d'Optimisation

$$MAX\ \frac{u^T X - rf}{(X^T Q X)^{1/2}}$$

$$\text{S/C}\ \ e^T X = 1\ ,\ U^T X > b$$

(b=contrainte d'investissement qu'on fixera à 3,45% pour la comparer avec le portefeuille à variance minimale)

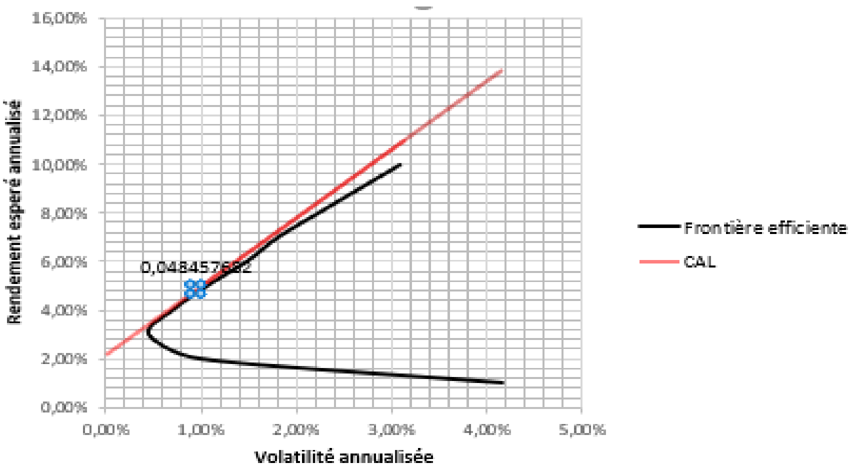
2.2.2. Cordonnées et performance du portefeuille marché de Markovitz

		S.M MONETIQUE	ALLIANCE	ATTIJARIWAFA BANK	DOUJA PROM	ITISSALAT AL-MAGHRIB	LESIEUR CRISTAL	LAFARGEHOLCIM MAROC	ATLANTA	BCP	COSUMAR	Marché monétaire interbancaire	TMP des émissions du tresor 2 ans	OPCVM MONETAIRE	OPCVM ACTIONS	OPCVM DIVERSIFIE	OPCVM OBLIGATAIRE
r/ans		0,18669851	0,30647943	0,10569697	0,013722126	0,002734109	0,246491764	0,025974026	-0,021993274	0,107328794	0,530228542	0,023136096	0,025454545	0,034095369	0,06992973	0,07900206	0,032730705
	x	0,007588505	0,001126218	0,007457386	0	0	0,023721435	0	0,001846574	0	0,028143205	0	0,756177278	0,1739394	0	0	0
	objective	9,755639176															
	r annualisé	4,85%															
	volatilité annualisée	0,95%															
markovitz protefeuille optimal risqué	sharpe annualisé	2,82															

La capital allocation line (CAL)[26] est représentée par l'équation suivante : $E(R_p) = r_f + \sigma(R_p) * sharpe$

[26] Pour un point donné, les différentes proportions alloués au portefeuille marché et à l'actif sans risque donnent une droite appelé ligne d'allocation de capital (capital allocation line (CAL))

Figure 5 : Frontière efficient et CAL de Markovitz



Source : Elaborée par l'auteur

Le portefeuille marché de Markovitz est celui qui dégage le meilleur ratio de Sharpe, en effet c'est la combinaison d'actifs qui paye le plus d'unités de rendement pour chaque unité de risque prise, l'optimisateur dans ce cas investit dans les valeurs les plus performantes en termes de risque/rendement (dans notre cas c'est les bons de trésor ainsi que les OPCVM monétaire remarquons aussi que notre optimisateur sélectionne l'OPCVM monétaire à la place du marché monétaire interbancaire puisque ce dernier à une corrélation avec l'obligataire qui est très élevée de l'ordre 0,75 alors que la corrélation de l'obligataire avec l'OPCVM monétaire est de -0,07, donc ce dernier rapporte en diversification beaucoup plus que l'investissement direct au niveau du marché monétaire).

La détermination du portefeuille marché n'est qu'une étape intermédiaire dans le processus d'investissement, le manager doit par la suite calibrer son portefeuille en fonction de son aversion au risque et consacrer y% de son investissement au portefeuille marché et 1-y% à l'actif sans risque.

2.3. Portefeuille de sharpe et tint

2.3.1. Programme d'Optimisation [27]

$$MIN\ \frac{1}{2}x^T V x - \frac{1}{f_0}x^T \gamma$$

[27] f_0 correspond au ratio de financement initial
rs correspond au rendement du surplus minimal imposé
$\hat{r}$ correspond au rendement du portefeuille équivalent au rendement du surplus minimal imposé
μL correspond à la croissance moyenne des engagements
V correspond à la matrice de covariance des actifs
x correspond au vecteur des poids

$$\text{S/C} \quad x^T\mu = \hat{r}\,,\, x^T e = 1$$

$$\hat{r} = \boldsymbol{r_s} + \frac{m}{f_0}\mu_L$$

Pour rester dans une optique de comparaison, nous allons étudier les poids du portefeuille de Sharpe et tint en imposant à notre modèle d'optimisation le même rendement réalisé par le portefeuille à variance minimale de Markovitz

2.3.2. Suppositions

Ratio de financement	100%
Poids du passif	1
Corrélation actif/passif	0,5
Volatilité annualisée du passif	0,1

Pour déterminer la matrice γ on devra calculer la covariance de chaque titre de notre portefeuille avec le passif, pour ce faire par exemple :

$$\text{Cov (Douja Prom,passif)= Corr (Douja Prom,passif)}*\sigma_{Douja\ Prom} * \sigma_{passif}$$

Par conséquent la matrice γ prend la forme suivante :

Tableau 5 : Matrice de covariance(actifs,passif)

	Matrice γ	Volatilité mensuelle des titres
S.M MONETIQUE	0,000759555	5,26235%
ALLIANCE	0,00325215	22,53155%
ATTIJARIWAFA BANK	0,000543964	3,76870%
DOUJA PROM	0,00125552	8,69850%
ITISSALAT AL-MAGHRIB	0,000721322	4,99746%
LESIEUR CRISTAL	0,000554603	3,84240%
LAFARGEHOLCIM MAROC	0,001099225	7,61566%
ATLANTA	0,000674535	4,67331%
BCP	0,000624961	4,32986%
COSUMAR	0,001056964	7,32286%
Marché monétaire interbancaire	1,73364E-05	0,12011%
TMP 2 ans	2,85289E-05	0,19765%
OPCVM MONETAIRE	8,46442E-05	0,58643%
OPCVM ACTIONS	0,000465616	3,22588%
OPCVM DIVERSIFIE	0,000276659	1,91675%
OPCVM OBLIGATAIRE	6,43069E-05	0,44553%

Source : Elaboré par l'auteur

2.3.3. Sharpe et tint VS Markovitz pour un rendement annualisé de 10% et sans contrainte du ministère des finances

- Cordonnés des deux portefeuilles

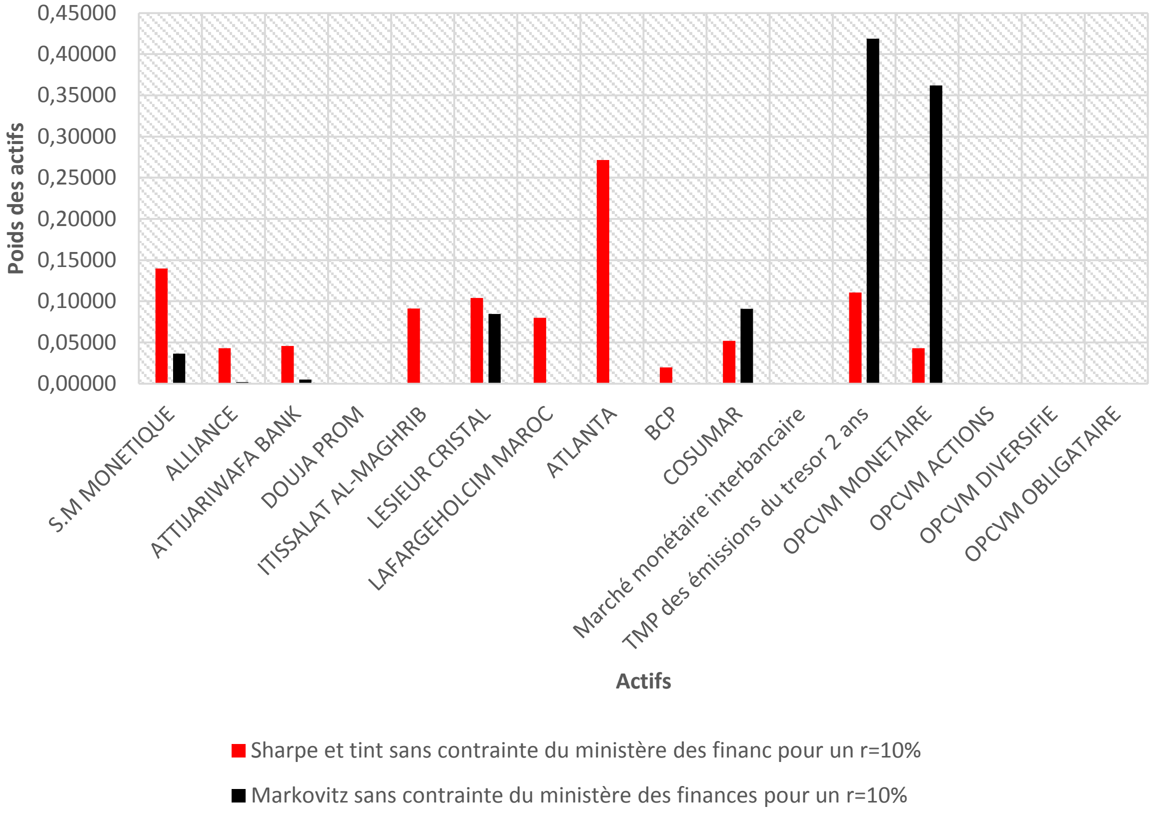
Tableau 6 : Sharpe/Tint VS Markovitz pour un r=10%

titre	Sharpe et tint sans contrainte du ministère des finances pour un r=10%	Markovitz sans contrainte du ministère des finances pour un r=10%
S.M MONETIQUE	0,13957	0,03647
ALLIANCE	0,04317	0,00192
ATTIJARIWAFA BANK	0,04576	0,00500
DOUJA PROM	0,00000	0,00000
ITISSALAT AL-MAGHRIB	0,09111	0,00000
LESIEUR CRISTAL	0,10409	0,08474
LAFARGEHOLCIM MAROC	0,07977	0,00000
ATLANTA	0,27158	0,00000
BCP	0,01953	0,00000
COSUMAR	0,05186	0,09086
Marché monétaire interbancaire	0,00000	0,00000
TMP des émissions du tresor 2 ans	0,11076	0,41896
OPCVM MONETAIRE	0,04281	0,36204
OPCVM ACTIONS	0,00000	0,00000
OPCVM DIVERSIFIE	0,00000	0,00000
OPCVM OBLIGATAIRE	0,00000	0,00000
r annualisé	10,00%	10,00%
volatilité annualisée	8,81%	3,09%
volatilité de la rentabilité du surplus annualisée selon Sharpe/Tint	0,45%	7,50%
rentabilité du passif	4,00%	4,00%
rentabilité du surplus selon Sharpe/Tint	6,00%	6,00%
ratio de Sharpe	0,89	2,53

Source : Elaboré par l'auteur

- Représentation graphique des résultats :

Figure 6 : méthodes de Markowitz et Sharpe et Tint - comparaison des allocations obtenues, sans contraintes d'investissement et pour un r=10%



Source : Elaboré par l'auteur

Le programme d'optimisation de Sharpe/Tint a pu aboutir à des résultats qui sont assez parlants c'est un modèle qui est diffèrent dans sa construction et permet de prendre en considération le passif de l'investisseur à travers le ratio de financement et la corrélation actif/passif. Les résultats que nous avons pu obtenir confirment ce que nous venons de dire, en effet l'optimisateur de Sharpe/Tint a consacré pratiquement 85% du portefeuille en actions alors que le Markovitz pour un même rendement exigé n'a consacré que 21%, l'optimisateur a sacrifié dans ce cas le confort d'une volatilité annualisée réduite au profit d'une volatilité du surplus très réduite, et ce en investissant dans les actifs risqués qui ont une forte corrélation avec le passif, en effet l'optimisateur recherche les actifs qui permettent d'une part de minimiser la variance du portefeuille et d'autre part maximiser la corrélation actif/passif.

En bref l'optimisateur de Sharpe/Tint se permet d'investir dans de valeurs risquées qui dégagent un rendement important et qui ont une corrélation positive avec le passif, dans notre cas nous avons vu que la volatilité du surplus annualisée est passée de 7,5% pour le Markovitz à 0,45% pour le Sharpe/Tint ce qui est très intéressant. Remarquons aussi que le ratio de Sharpe est passé à 0,89 ce qui est un point négatif pour l'optimisateur et cela s'explique, dans la mesure ou le rendement de 10% que nous avons exigé est assez élevé.

2.3.4. Sharpe et tint avec contrainte du ministère des finances VS Sharpe et tint sans contrainte du ministère des finances pour un rendement annualisé de 10

Tableau 7 : Sharpe/Tint sans contrainte VS Sharpe/Tint avec contrainte pour un r=10%

titre	Sharpe et tint sans contrainte du ministère des finances pour un r=10%	Sharpe et tint avec contrainte du ministère des finances pour un r=10%
S.M MONETIQUE	0,13957	0,05209
ALLIANCE	0,04317	0,04684
ATTIJARIWAFA BANK	0,04576	0,00000
DOUJA PROM	0,00000	0,00000
ITISSALAT AL-MAGHRIB	0,09111	0,00000
LESIEUR CRISTAL	0,10409	0,00000
LAFARGEHOLCIM MAROC	0,07977	0,04890
ATLANTA	0,27158	0,04555
BCP	0,01953	0,00000
COSUMAR	0,05186	0,10663
Marché monétaire interbancaire	0,00000	0,00000
TMP des émissions du tresor 2 ans	0,11076	0,55000
OPCVM MONETAIRE	0,04281	0,15000
OPCVM ACTIONS	0,00000	0,00000
OPCVM DIVERSIFIE	0,00000	0,00000
OPCVM OBLIGATAIRE	0,00000	0,00000
r annualisé	10,00%	10,00%
volatilité annualisée	8,81%	5,43%
volatilité de la rentabilité du surplus annualisée selon Sharpe/Tint	0,45%	5,42%
rentabilité du passif	4,00%	4,00%
rentabilité du surplus selon Sharpe/Tint	6,00%	6,00%
ratio de Sharpe	0,89	1,44

Source : Elaboré par l'auteur

La contrainte règlementaire a lourdement pénalisé l'optimisateur de Sharpe/Tint, en effet la deuxième contrainte a fait que l'optimisateur n'a pas pu dépasser le poids de 30% pour les actions, en résultat, la volatilité de la rentabilité du surplus annualisée est passée de 0,45% à 5,42%, ce qui réduit énormément le potentiel du modèle, cependant notons que le modèle reste correct si nous le comparons avec les résultats du Markovitz, dans la mesure où sa volatilité du surplus est nettement inférieure.

En résumé, la contrainte réglementaire pénalise le Sharpe/Tint en termes de volatilité du surplus même si pour un même rendement exigé, elle équilibre partiellement le ratio de Sharpe ainsi que la risque du portefeuille d'actif.

2.4. Portefeuille de Talfi

2.4.1. Programme d'optimisation et suppositions

$$MAX\ \varphi E(\tilde{R}_X) - \varphi^2 \frac{VAR(\tilde{R}_X)}{tol} + \frac{2m\varphi}{tol} COV(\tilde{R}_X, \tilde{r})$$

Ratio de financement	100%
Poids du passif	1
Corrélation actif/passif	0,5
Volatilité annualisée du passif	0,1
H	7 ans

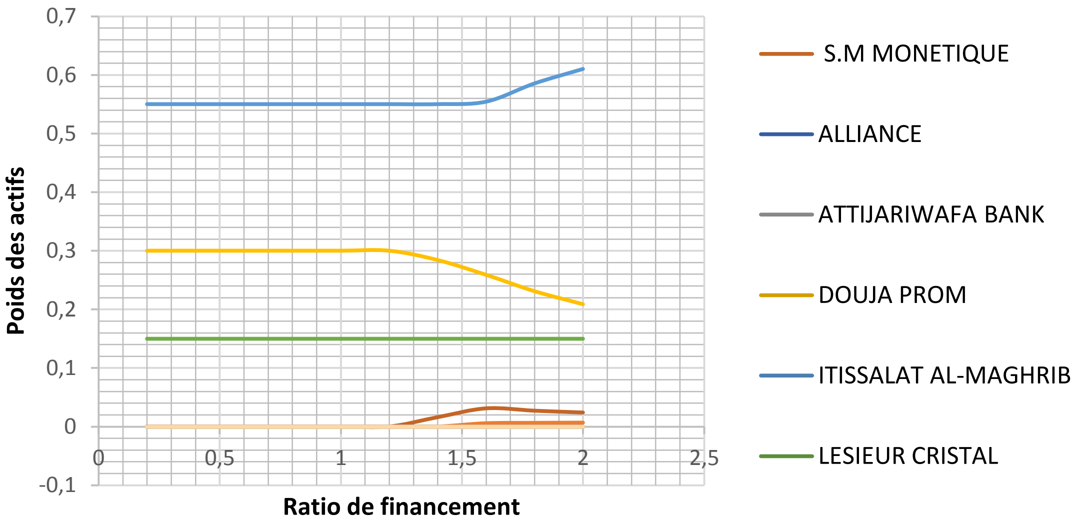
2.4.2. Cordonnées et performance du portefeuille de Talfi

Tableau 8 : Talfi VS Markovitz avec contrainte réglementaire

	r=16,87%		r=13,23%	
	Moyenne des dix premières allocations avec une tolérance au risque de 2%	Portefeuille à variance minimale de Markovitz pour un r=16,87%	Moyenne des dix premières allocations avec une tolérance au risque de 1%	Portefeuille à variance minimale de Markovitz pour un r=13,23%
S.M MONETIQUE	0,009760	0,022889928	0,013514	0,054024359
ALLIANCE	0,000000	0	0,000000	0,002584276
ATTIJARIWAFA BANK	0,000000	0	0,000000	0
DOUJA PROM	0,000000	0	0,000000	0
ITISSALAT AL-MAGHRIB	0,000000	0	0,000000	0
LESIEUR CRISTAL	0,000000	0,005675614	0,000000	0,094054246
LAFARGEHOLCIM MAROC	0,000000	0	0,000000	0
ATLANTA	0,001960	0	0,003552	0
BCP	0,000000	0	0,000000	0
COSUMAR	0,278297	0,271434458	0,205259	0,149337119
TMP des émissions du tresor 2 ans	0,559982	0,55	0,622378	0,55
OPCVM MONETAIRE	0,150000	0,15	0,150000	0,15
OPCVM ACTIONS	0,000000	0	0,000000	0
OPCVM DIVERSIFIE	0,000000	0	0,000000	0
OPCVM OBLIGATAIRE	0,000000	0	0,000000	0
Marché monétaire interbancaire	0,000000	0	0,005296	0
R annuelle	16,8709%	16,8709%	13,2359%	13,2359%
volatilité annualisée	6,9122%	6,8046%	5,0633%	4,5945%
Sharpe	**2,106013221**	**2,139336044**	**2,157123758**	**2,377228338**
Rendement du surplus annualisé selon Talfi	14,557269%	14,557301%	10,922252%	10,922290%
Volatilité du surplus annualisée selon Talfi	6,96%	6,85%	5,11%	4,61%

Source : Elaboré par l'auteur

Figure 7 : Evolution des poids alloués à chaque actif en fonction du ratio de financement avec une tolérance de 2%



Source : Elaboré par l'auteur

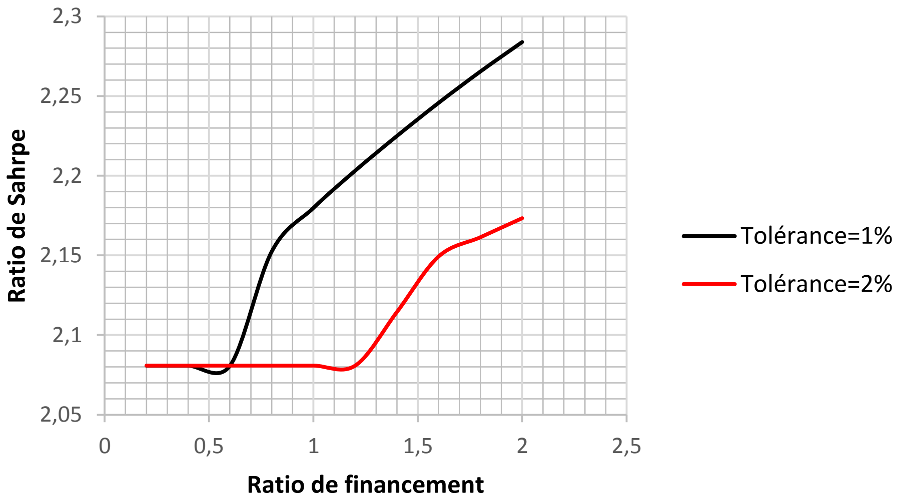
Le portefeuille de Talfi alloue les actifs en fonction de la tolérance au risque de l'investisseur, au niveau de la partie théorique, nous avons dit qu'il existe une relation positive entre poids des actifs risqués et tolérance au risque, ce qui se confirme ici, dans la mesure où le poids alloué aux actifs risqués est plus important pour la tolérance au risque de 2%, en effet pour une même tolérance, l'optimisateur a investi 30% en actifs risqués tandis qu'il a investi 22% en actifs risqués pour une tolérance de 1%, soulignons que le ratio de Sharpe décroit en passant d'une tolérance de 1% à 2% néanmoins il reste très correcte (supérieur à 1)

Nous pouvons remarquer aussi à partir du graphique (figure 7) qui trace le poids des actifs en fonction du ratio de financement que les valeurs risquées décroissent au fur et à mesure que le ratio de financement augmente ce qui est cohérent avec le modèle de Talfi.[28].

En ce qui concerne la comparaison du modèle de Talfi avec le modèle à variance minimale de Markovitz pour un même rendement, nous pouvons constater que ce dernier est plus performant dans les deux cas, et ce pour la volatilité du surplus, la volatilité et le ratio de Sharpe, néanmoins le modèle de Markovtiz ne prend en considération ni la tolérance au risque ni l'horizon du temps ce qui signifie que le Talfi sera probablement plus performant en therme de projection sur les années à venir.

[28] Lorsque le ratio de financement initial est assez élevé, la part d'obligations dans le portefeuille est prépondérante. En effet, avec un ratio de financement initial assez élevé, l'investisseur choisit de sécuriser ses placements. Il investit la majorité de son portefeuille dans des obligations en particulier si celles-ci sont corrélées à l'actif le plus rentable. Si le ratio de financement initial n'est pas assez élevé, c'est la part de l'actif le plus rentable qui est prépondérante. L'investisseur souhaite rentabiliser ses placements. Or, dans ce cas, plus l'actif risqué est corrélé à l'actif obligataire, plus l'investisseur est incité à investir dans l'actif risqué.

Figure 8 : Evolution du ratio de Sharpe en fonction du ratio de financement pour une tolérance de 1% et 2%



Source : Elaboré par l'auteur

Pour le graphique qui trace l'évolution du ratio de Sharpe en fonction du ratio de financement, nous pouvons constater qu'il y a une même tendance de comportement, avec une accélération plus importante pour une tolérance au risque de 1%. Pour un ratio de financement inferieur à 0,5, le ratio de Sharpe était constant et pratiquement le même pour les deux tolérance, le ratio de Sharpe commence à suivre la même trajectoire que le ratio de financement (croissance) au moment où ce dernier dépasse 0,6 pour une tolérance de 1% et 1,2 pour une tolérance de 2%, ce qui veut dire que les tolérances au risque inferieures bénéficient beaucoup plus des ratios de financement élevés en terme de performance, cela est logique dans la mesure ou pour des tolérances supérieurs, l'investisseur est moins risquophobe, donc il investit dans des actifs risqués certes très rentables mais qui vont lui faire baisser son ratio de Sharpe, cela se confirme encore plus lorsque nous savons que l'investissement en actifs risqués décroit avec la croissance du ratio de financement.

Bibliographie

AMENC Noel, LE SOURD Véronique, « Théorie du portefeuille et analyse de sa performance »2003

BERRADA, S. (2015), Allocation stratégique d'actifs dans le cadre de l'épargne-retraite, mémoire d'actuariat, ENSAE ParisTech.

FALEH, A. (2011), Allocation stratégique d'actifs et ALM pour les régimes de retraite, thèse, Institut des sciences financières et d'assurance.

LEIBOWITZ, M. KOGELMAN, S. BABER, L. (1992), Asset Performance and Surplus Control: A Dual-Shortfall Approach, The Journal of Portfolio Management.

MARKOWITZ, H. (1952), Portfolio selection, The Journal of Finance.

SHARPE, F. TINT, G. (1990), Liabilities – A new approach, Journal of Portfolio Management.

TALFI, M. (2008), Choix optimal du portefeuille de fonds de pension en temps discret, Rapport de recherche, Laboratoire de Sciences Actuarielles et Financières, Lyon 1

TALFI, M. (2008), Organisation des systèmes de retraites et modélisation des fonds de pension, Thèse, Université Claude Bernard- Lyon 1

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Markowitz_frontier.jpg, consulté le [12 juin 2018]