

## **Controverse entre apôtres et opposants de la gaussianité des marchés financiers : Revue de littérature**

## **Controversy between apostles and opponents of the gaussianity of the financial markets : Literature review**

**HAJAR BENJANA**

Professeure-Chercheure

Ecole Nationale de Commerce et de Gestion

Université Mohamed I<sup>er</sup> Maroc

Laboratoire en Gestion Appliquée et Intelligence Marketing

tulipomanie@hotmail.com

**Date de soumission :** 12/05/2019

**Date d'acceptation :** 24/06/2019

**Pour citer cet article :**

BENJANA H. (2019) «Controverse entre apôtres et opposants de la gaussianité des marchés financiers : Revue de littérature», Revue du contrôle, de la comptabilité et de l'audit « Numéro 9 : Juin 2019 / Volume 4 : numéro 1 » p : 332 - 353

## Résumé

Beaucoup de financiers se sont engoués d'étudier les marchés financiers et leur fonctionnement et avancent que la loi normale demeure la seule loi qui les gouverne. Celle-ci s'appuie sur la rationalité des investisseurs et son corollaire l'efficacité des marchés et approuve que les choix des boursicoteurs s'articulent autour des deux moments statistiques moyenne/variance. En effet, la loi normale est désignée sous de multiples dénominations adoptées au cours du temps et selon les utilisateurs. Telles la courbe des possibilités ou la loi des possibilités, la loi de LAPLACE-GAUSS (XVIIIe siècle), la loi de fréquence des erreurs (XIXe siècle) ou encore la loi de déviation selon une moyenne (XXe siècle).

Alors que la non normalité reste un paradigme réfutant la modélisation de la finance. A sa guise, celle-ci est loin d'être une science exacte.

L'objectif de ce papier est donc d'ouvrir le débat entre adeptes et opposants de la gaussianité des marchés financiers tout en élucidant les soubassements de chaque raisonnement.

**Mots clefs** : Marchés financiers, Loi de Gauss, traditionalistes, comportementalistes, débat.

## Abstract

Many financiers are fond of studying the financial markets and how they work and argue that the normal law remains the only law that governs them. This is based on the rationality of investors and its corollary the efficiency of the markets and agrees that the choices of the swindlers are articulated around the two parameters or statistical moments mean/variance. Indeed, the normal law is designated under multiple names adopted over time and according to the users, such as the curve of the possibilities or the law of the possibilities, the law of LAPLACE-GAUSS (XVIIIe century), the law of frequency of the errors (19th century) or the law of deviation according to an average (twentieth century). While non-normality remains a paradigm refuting the modeling of finance. As it pleases, this one is far from being an exact science.

The purpose of this paper is to open the debate between followers and opponents of the gaussianity of the financial markets while elucidating the underpinnings of each reasoning.

**Key-words** : Financial market, Gaussian law, traditionalists, behaviorists, debate.

## Introduction

Les financiers classiques se bercent de vaines illusions et énoncent qu'il n'y a qu'une seule loi qui régit les marchés financiers. C'est bien entendu la loi normale ou de Laplace-Gauss. Celle-ci s'appuie sur la rationalité des investisseurs et son corollaire l'efficience des marchés.

A cet égard, la finance traditionnelle, quoiqu'elle repose sur des hypothèses erronées, reste le modèle de référence adapté par un grand nombre de financiers nommés les traditionalistes et qui ont figolé leurs arguments pour faire face aux apôtres de la finance comportementale. Ces derniers stipulent qu'il existe également d'autres grandeurs entrant en jeu dans les choix des boursicoteurs qui ne sont pas parfaitement rationnels et n'ont pas une attitude neumannienne. Ainsi, ils appuient le rôle décisif de la finance comportementale, qui est un cadre conceptuel de la psychologie des investisseurs, en donnant une dimension humaine aux marchés financiers. A cet égard, des psychologues tels que KAHNEMAN, TVERSKY et leurs disciples ont tenté d'étudier comment les individus prennent des décisions sur les marchés financiers sachant que leurs biais comportementaux mettent en échec leur rationalité. Telle rationalité est la pierre angulaire de la normalité/gaussianité des marchés financiers.

Ce faisant, notre problématique se présente comme suit : ***Pourquoi la loi de Laplace-Gauss est-elle considérée comme la loi sacro-sainte qui gouverne les marchés financiers ?***

De cette question centrale découlent moult sous-questions :

- Pourquoi y a-t-il une confusion entre sciences naturelles et sciences sociales ? Pourquoi emprunter des outils purement mathématiques pour modéliser les comportements de l'Homme sur le marché ?
- Pour quelles raisons y a-t-il unanimité sur la gaussianité des rentabilités sur les marchés financiers ? Et d'où émane le recours à la loi normale en finance ? Pourquoi nous semble-t-il difficile de nous heurter à cet édifice de normalité ?

Bref, qu'est ce que la normalité (gaussianité) des rentabilités ? Et pourquoi cette longue controverse entre apôtres et adversaires de la loi normale ?

Pour répondre à ce questionnement, il est utile de présenter les deux courants de pensée tout au long de cet article de recherche. Ce faisant, nous présentons un arsenal théorique qui réfère dans un premier temps à la normalité et dans un second temps à la non normalité. Nous essayons d'opposer les financiers traditionalistes qui s'accordent sur la dictature de la normalité des marchés financiers et Mandelbrot et les comportementalistes qui, à contrario, plaident en faveur de la non gaussianité.

## 1. Gaussianité et traditionalistes

Les premières réflexions sur la loi normale remontent au XVI<sup>e</sup> siècle, où le physicien et astronome italien GALILEE nota que les mesures d'observations astronomiques étaient distribuées de façon symétrique et tendaient à se grouper autour d'une valeur, qu'il nommait valeur vraie. Cette remarque était un prélude à la formalisation un siècle plus tard par le mathématicien suisse Jacques BERNOULLI de la loi, dite loi des grands nombres, qui stipule qu'à toute suite de  $n$  événements aléatoires, avec  $n$  très grand, il est possible d'associer une loi globale de probabilités.

Mais la loi normale fut conçue pour la première fois en tant que telle par LAPLACE (1749-1827). Elle a été utilisée également en finance par BACHELIER en 1900 lors de la présentation de sa thèse dénommée "*La théorie de la spéculation*". Un demi-siècle plus tard, MARKOWITZ propose le premier modèle de marché pour évaluer le risque basé pareillement sur une loi de Gauss. Encore, la loi normale est l'hypothèse de référence qui a, dans les années 60, donné lieu à la théorie d'efficience des marchés financiers, telle efficience est à son tour le pivot de la théorie moderne de portefeuille ce qui fait qu'elle est implicitement soumise à une loi normale.

En 1973, les deux économistes BLACK et SHOLES déterminent comment calculer le prix des options à partir d'hypothèses fondées sur la loi normale (TACHET DES COMBES, 2011). Leur méthode est certes importante et connaît un grand essor parce qu'elle permet notamment d'évaluer les risques.

La loi normale stipule que les rentabilités en bourse sont normalement<sup>1</sup>, symétriquement<sup>2</sup> et continuellement<sup>3</sup> distribués et met de l'avant les deux premiers moments d'une distribution statistique des rentabilités : la moyenne et la variance sur lesquels repose la gestion de portefeuille.

Nonobstant, la finance ne peut être soumise aveuglement à cette loi dont le postulat énonce l'existence d'un marché efficient, sans opportunités d'arbitrage, sans coûts de transactions et sans contraintes institutionnelles. Et surtout avec la présence d'un investisseur considéré par

---

<sup>1</sup> Les rentabilités sont assujettis à une loi de Laplace-Gauss et sont définis donc par les deux paramètres moyenne/variance.

<sup>2</sup> Sur un marché financier régi par une loi normale, le risque de perdre est compensé par le risque de gagner. Ainsi, les rentabilités sont symétriques autour de la moyenne.

<sup>3</sup> Les prix sont incrémentaux c'est à dire que les prix à l'instant  $t_0$  prévoient ceux de la période  $t_{+1}$ .

comme un être rationnel par excellence. Mais, qu'est ce que la rationalité dont parle souvent la finance traditionnelle ?

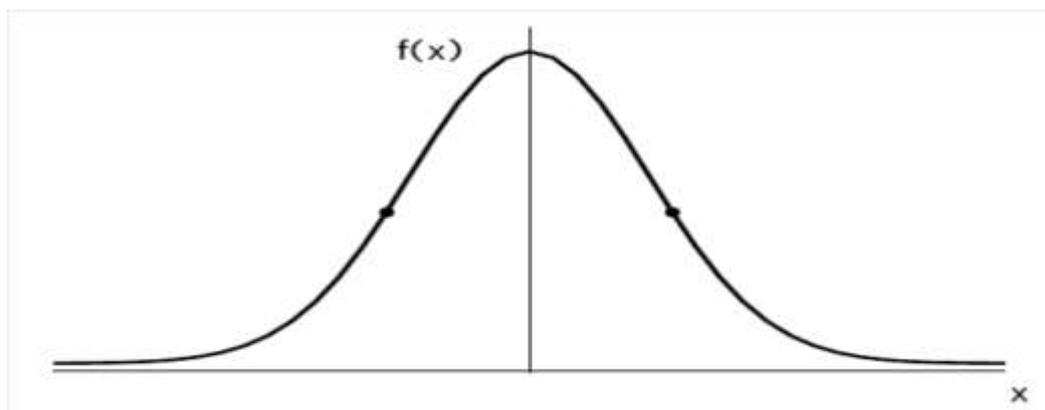
Pour répondre à cette question, il faut bel et bien parler de l'homo œconomicus qui est supposé être rationnel. Celui-ci est censé accroître l'espérance mathématique de sa fonction d'utilité. MORGENSTERN et NEUMANN (AFTALION, 2004) avancent la définition suivante de la rationalité : *"Un individu qui, dans ses choix risqués, suit cinq axiomes dits de rationalité, se comporte comme s'il maximisait l'espérance mathématique d'une fonction dite d'utilité"*.

La loi normale fut fondée en tant que telle pour la première fois par le mathématicien français Pierre-Simon de LAPLACE (1749-1827). Cette loi est également appelée par PEARSON en 1893 loi de GAUSS ou loi de LAPLACE-GAUSS. Elle exige que les rentabilités soient normalement, continuellement et symétriquement distribués.

Pourtant, la loi normale est le plus souvent nommée d'après le nom du mathématicien, physicien et astronome allemand Carl Friedrich GAUSS qui l'utilisa quelques années plus tard pour développer des méthodes standards de mesure en astronomie.

La courbe représentative de la loi normale est appelée courbe en cloche<sup>4</sup>, elle se présente comme suit :

**Figure N° 1 : Courbe en cloche**



Source : MANDELBROT B. & HDSON R-L. (2006), Une approche fractale des marchés : risquer, perdre et gagner, édition ODILE JACOB, page 56.

<sup>4</sup> Appelée également courbe de Gauss, la courbe en cloche est caractérisée par une faible dispersion des valeurs, s'approchant symétriquement d'une valeur moyenne.

La courbe de distribution de la loi de GAUSS d'abscisse  $x$  et d'ordonnée  $F(x)$  est une courbe "en cloche", symétrique par rapport à l'axe vertical d'équation  $x = \mu$ . La loi de GAUSS décrit ainsi pour toute variable aléatoire sa répartition autour de sa valeur moyenne  $\mu$ ; la distribution de GAUSS est d'autant plus aplatie et large que son écart-type  $\sigma$  est grand. Autrement dit, plus la variance de la loi de GAUSS est élevée et plus la réalisation de la variable aléatoire a de chances d'être éloignée de sa valeur moyenne.

NEUMANN & MORGENSTERN sont à leurs tours fidèles à la gaussianité des rentabilités boursières. Ils ont en 1944 adopté dans leur livre "*Theory of Game and Economic Behaviour*" une approche qui apporte une solution au problème de la mesure d'utilité. Trois hypothèses forment alors la base du raisonnement à la VON NEUMANN & MORGENSTERN et qui sont : la rationalité, la continuité et l'indépendance. Celles-ci sont également le socle de la théorie de normalité. D'ailleurs, l'hypothèse de rationalité, qui est mise en avant par VON NEUMANN & MORGENSTERN, est la base fondamentale et immuable sur laquelle s'est édifiée la théorie moderne de portefeuille de MARKOWITZ. Ainsi, la maximisation d'utilité en fonction du risque est le même principe utilisé par MARKOWITZ dans sa théorie moderne de portefeuille puisqu'il a posé dans son modèle l'optimisation d'un portefeuille en maximisant sa fonction d'utilité ou de richesse. VON NEUMANN et MORGENSTERN entreprirent la discussion de la notion de rationalité. A cet égard, ils reprennent et axiomatisent le critère d'utilité espérée de Daniel BERNOULLI.

Pour plus de débroussaillage, nous allons présenter chaque apôtre de la gaussianité à part entière.

### **1.1. P.S. LAPLACE & C.F. GAUSS**

La loi normale fut fondée en tant que telle pour la première fois par le mathématicien français Pierre-Simon de LAPLACE (1749-1827). Cette loi est également appelée par PEARSON en 1893 loi de GAUSS ou loi de LAPLACE-GAUSS. Elle exige que les rentabilités soient normalement, continuellement et symétriquement distribués. LAPLACE obtint en 1733 la loi normale comme une approximation de la loi hypergéométrique adaptée aux variables aléatoires  $X$  de BERNOULLI et ce en reprenant les travaux du mathématicien britannique Abraham DE MOIVE.

Pourtant, la loi normale est le plus souvent dénommée d'après le nom du mathématicien, physicien et astronome allemand Carl Friedrich GAUSS qui l'utilisa quelques années plus tard pour développer des méthodes standards de mesure en astronomie.

LAPLACE & GAUSS sont donc les précurseurs à parler d'une distribution gaussienne caractérisée entièrement par deux paramètres primordiaux sa moyenne et son écart-type. Cette distribution servira de référence pour les travaux de MARKOWITZ en matière d'allocation des actifs financiers.

La loi de GAUSS est communément utilisée dans les calculs statistiques comme une approximation de nombreuses fonctions de probabilités. Les paramètres espérance/variance de la loi de GAUSS sont alors ceux des fonctions de probabilités sur lesquelles s'effectue l'approximation. Les lois de probabilités continues, et tout particulièrement la loi de GAUSS, sont souvent utilisées comme des approximations des lois de probabilités discrètes (loi de Poisson, loi binomiale), autant pour la construction du modèle statistique du phénomène étudié que pour l'application des techniques statistiques. Le rôle de la loi de Gauss est donc important dans la théorie des probabilités et ses applications statistiques. La loi normale a également un rôle dominant en matière des marchés financiers car elle permet le calcul de l'espérance et de la variance des actifs financiers.

Dans le cas d'une variable aléatoire dont les valeurs couvrent un intervalle, fini ou infini, mais indénombrable, tel l'ensemble des réels ou une de ses parties, les variables aléatoires sont dites continues et la fonction de probabilités, dite aussi fonction de densité, associée est un modèle continu correspondant au mieux à la distribution de fréquences de cette variable aléatoire.

La fonction de probabilités continues d'une telle variable aléatoire est alors caractérisée par son espérance et par sa variance. Nous notons que, dans le cas des variables aléatoires continues, seule la probabilité de réalisation définie dans un intervalle (fini ou infini) existe : la probabilité qu'une variable aléatoire continue prenne une valeur numérique spécifique est nulle.

## **1.2. REGNAULT J.**

REGNAULT est le fondateur de la science de la bourse par excellence. C'est le pionnier de la théorie de marche au hasard. En 1863, il présente un modèle financier théorique ayant pour vocation d'étudier les variations des cours de la bourse de Paris.

REGNAULT<sup>5</sup> considère que la loi normale est la seule loi des probabilités qui est apte à gouverner la totalité des systèmes sociaux. REGNAULT (GALAVIELLE, 2003) ajoute : "*Les variations de la bourse sont soumises à des lois mathématiques immuables !*". De ce fait, il contribue à la mise au point de l'esquisse de la théorie moderne de portefeuille dont la théorie de normalité trouve toute sa légitimité.

REGNAULT continue même à lier équité et justesse de la bourse à la loi normale. A cet égard, il avance qu'une bourse est équitable et juste si et seulement si :

- Les spéculateurs sont inévitablement, un jour ou l'autre, ruinés ;
- Tous les intervenants sont dans une situation égale dans la mesure où la bourse obéit, à travers *la loi normale*, aux lois de la nature.

### **1.3. BACHELIER L.**

BACHELIER reprend les travaux de REGNAULT pour développer qu' "*au même moment, les acheteurs croient à une hausse et les vendeurs à une baisse des prix*" (GEMAN, et al., 2002). Donc, à un moment donné, les prix qui sont fondés sur les paris des intervenants, ont autant de chance de monter que de baisser. Cela veut dire qu'un spéculateur a autant de chance de gagner que de perdre.

BACHELIER ajoute aussi dans sa théorie de la spéculation que sur un marché boursier, ni les acheteurs ni les vendeurs ne peuvent réaliser des profits systématiques et que les prix sur un tel marché suivent des marches aléatoires (AFTALION, 2004).

A cet égard, BACHELIER a le privilège de probabiliser<sup>6</sup> les marchés financiers et donc de concevoir pour la première fois les variations boursières comme des résultats de tirages aléatoires gaussien-markoviens. Les probabilités sur lesquelles repose le raisonnement de BACHELIER présentent une plate forme de la loi normale qui demeure aujourd'hui la seule loi des marchés financiers. Ceci a changé la perception du risque par le marché et a facilité sa modélisation. Il ressort clairement des apports de BACHELIER la théorie de normalité qui se base sur la symétrie des rentabilités boursières et leur continuité.

---

<sup>5</sup> Il est utile de signaler que REGNAULT n'a nommé qu'implicitement la loi normale dans ses travaux, ce n'est qu'en 1877 que ce terme a vu le jour grâce à Wilhelm LEXIS.

<sup>6</sup> BACHELIER est le pionnier d'introduire les calculs probabilistes dans les marchés financiers via sa conceptualisation du hasard.

Ce faisant, il propose dans sa thèse la première modélisation financière et se penche dans son modèle sur les hypothèses fondatrices suivantes :

- La valeur d'un actif financier varie à chaque instant par saut successif  $\pm v$  avec la même probabilité  $1/2$  : il semble que le marché, c'est-à-dire l'ensemble des spéculateurs ne doit croire à un instant donné ni à la hausse, ni à la baisse, puisque, pour chaque côté, il y a autant d'acheteurs que de vendeurs ;
- Les variations de l'actif sont indépendantes d'un instant à l'autre : nous pouvons admettre que la probabilité d'un écart à partir du cours vrai est indépendante de la valeur absolue de ce cours, et que la courbe des probabilités est symétrique par rapport au cours vrai. (BACHELIER, 1901)

#### **1.4. NEUMANN J.V & MORGENSTERN O.**

VON NEUMANN & MORGENSTERN sont les premiers à élaborer et axiomatiser le modèle d'utilité espérée qui est un modèle décisionnel dans l'incertain en partant de la théorie des jeux.

Telle théorie est un outil d'analyse qui permet de prendre en compte les interactions stratégiques entre les agents économiques et qui s'est développée à partir des travaux de VON NEUMANN et MORGENSTERN. Les individus rationnels interagissent dans des situations conflictuelles puisque le comportement d'un individu peut affecter directement la satisfaction d'autres individus.

De plus, l'axiomatique de VON NEUMANN et MORGENSTERN est fondée sur le critère d'utilité espérée de Daniel BERNOULLI. En effet, le théorème de l'utilité espérée dicte que lorsqu'un investisseur est confronté à plusieurs loteries<sup>7</sup>, il choisit celle qui lui fournit le plus d'utilité.

Véritablement, NEUMANN & MORGENSTERN sont à leurs tours fidèles à la gaussianité des rentabilités boursières. Ils ont en 1944 adopté dans leur livre "*Theory of Game and Economic Behaviour*" une approche qui apporte une solution au problème de la mesure d'utilité. Trois hypothèses forment alors la base du raisonnement à la VON NEUMANN & MORGENSTERN et qui sont : la rationalité, la continuité et l'indépendance. Celles-ci sont également le socle de la théorie de normalité. D'ailleurs, l'hypothèse de rationalité, qui est

---

<sup>7</sup> Il s'agit des distributions de probabilités de gains ou de taux de rendement.

mise en avant par VON NEUMANN & MORGENSTERN, est la base fondamentale et immuable sur laquelle s'est édifiée la théorie moderne de portefeuille de MARKOWITZ.

Ainsi, la maximisation d'utilité en fonction du risque est le même principe utilisé par MARKOWITZ dans sa théorie moderne de portefeuille puisqu'il a posé dans son modèle l'optimisation d'un portefeuille en maximisant sa fonction d'utilité ou de richesse.

VON NEUMANN et MORGENSTERN entreprirent la discussion de la notion de rationalité. A cet égard, ils mettent de l'avant un axiome dit d'*indépendance*, cet axiome est le pivot de la théorie d'utilité espérée et se définit comme suit :

Si  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont trois loteries telles que  $x \succ z$  c'est-à-dire  $x$  est préféré à  $z$ , alors  $\forall \alpha$  tel que

$$0 < \alpha < 1, \alpha x + (1-\alpha)y \succ \alpha z + (1-\alpha)y.$$

### **1.5. KEYNES J.M.**

KEYNES plaide à son tour le recours à la loi normale comme la seule loi qui est apte à régir les marchés financiers. Sa plaidoirie est appuyée sur une autre hypothèse dite de *continuité* qui stipule que les variations des prix entre deux instants successifs sont incrémentales. Autrement dit, le prix à l'instant  $t_0$  est un très bon estimateur du prix supposé en  $t+1$ . La très faible amplitude des variations de prix débouche tout naturellement sur l'idée d'une évolution harmonieuse. Seul un choc informationnel important pourrait perturber cette régularité.

### **1.6. MARKOWITZ H.**

MARKOWITZ est considéré comme le gourou de la théorie moderne de portefeuille. En effet, depuis les années 80 et jusqu'à nos jours, l'industrie de portefeuille prend corps. Ses prémisses restent l'apanage de MARKOWITZ en 1952 qui a, à son tour, mobilisé l'hypothèse de marche au hasard issue des travaux de REGNAULT en 1863 et BACHELIER en 1900 et a utilisé le cadre proposé par VON NEUMANN & MORGENSTERN en 1944 en matière d'utilité espérée. Son apport est de démontrer que la rémunération exigée par un investisseur est due au risque de marché qui est rémunéré par une prime de risque.

MARKOWITZ prône dans son raisonnement la loi normale qui stipule que les rentabilités boursières sont normalement, symétriquement et continuellement distribués. Ce qui engendre des rentabilités purement définis par les deux paramètres moyenne/variance. Pour légitimer l'application de son modèle moyenne/variance, MARKOWITZ tente de démontrer que, pour

différentes fonctions d'utilité et chroniques distributionnelles des rentabilités, la connaissance de la moyenne et de la variance permet de donner une approximation presque parfaite de l'utilité espérée en se basant sur la fonction d'utilité quadratique.

Ainsi, le modèle moyenne/variance de MARKOWITZ, qui tend à définir entièrement les préférences de l'investisseur en se basant seulement sur l'espérance et la variance de la richesse, stipule que les préférences des individus sont déterminées via les deux premiers moments de la distribution des rentabilités.

Eu égard, la fonction d'utilité joue un rôle primordial dans la théorie moderne de portefeuille puisqu'elle permet de définir l'équilibre de l'investisseur dans le cadre du modèle moyenne/variance, c'est-à-dire qu'elle conduit au choix d'un portefeuille unique parmi un ensemble de portefeuilles efficients. Outre, le modèle moyenne/variance requiert que la distribution des rentabilités suive une loi normale indépendamment et identiquement distribuée. Dans ces conditions, il devient alors légitime de ne considérer que les deux premiers moments de la fonction de distribution des rentabilités.

La normalité qui est le socle de la théorie moderne de portefeuille suppose l'efficience des marchés, l'autocorrélation nulle des rentabilités et la symétrie des distributions. Cette dernière suppose qu'il est possible de gagner ou de perdre en bourse en très peu de temps et que le risque de perdre est forcément compensé par celui de gagner.

En somme, la normalité est l'hypothèse de référence qui a dans les années 60 donné lieu à la fameuse théorie d'efficience des marchés financiers, telle efficience est à son tour la pièce maîtresse de la théorie moderne de portefeuille ; donc celle-ci est implicitement soumise à une loi normale.

Toutefois, le modèle moyenne/variance s'avère paradoxal puisqu'il ne permet au décideur de choisir un portefeuille efficient que dans le cas d'une loi normale. De ce fait, ce modèle est loin d'être un modèle général de choix des actifs financiers.

### **1.7. OSBORNE M.**

OSBORNE prend à son tour parti pour la gaussianité des rentabilités. A cet effet, il a en 1959 appuyé son argumentation sur le théorème *limite centrale*. Ce théorème (BROQUET, 2007) annonce que la distribution de la somme de variables aléatoires distribuées indépendamment et identiquement et ayant des moyennes et des variances finies tend vers la loi normale quand le nombre des variables additionnées augmente.

## **2. Non normalité, MANDELBROT et les comportementalistes**

La non gaussianité d'une variable aléatoire est la divergence qui existe entre sa distribution et sa meilleure approximation gaussienne. Dans ce contexte, de nombreux financiers présentés dans les paragraphes suivants plaident en faveur de la non gaussianité.

### **2.1. PARETO V.**

L'apanage de la non normalité reste celui de PARETO qui avait découvert en 1875 que la répartition des revenus ne suivait pas une courbe en cloche. Il y a beaucoup plus de hauts revenus que ne le décrirait une courbe gaussienne. PARETO s'ingère même dans la gestion de portefeuille et dit que le recours à la moyenne n'est pas légitime (MANDELBROT & HUDSON, 2007).

### **2.2. MANDELBROT B.**

A travers sa théorie fractale, MANDELBROT essaye de mettre l'accent sur l'existence de distributions leptokurtiques ou non gaussiennes sur les variations boursières et remet en cause l'indépendance des taux des rentabilités boursiers successifs. Cette anomalie distributionnelle par rapport à l'hypothèse brownienne de la modélisation financière classique, a conduit MANDELBROT en 1962 à proposer des distributions  $\alpha$ -stables à variance infinie, à l'encontre de la variance constante du courant de la finance traditionnelle.

De ce fait, Mandelbrot demeure le fondateur de la théorie de fractalité qui sous-entend la non normalité des rentabilités. Ce faisant, il affirme (MANDELBROT & HUDSON, 2007) ce qui suit :

*Toute ma vie, j'ai voulu étudier des phénomènes compliqués, confus, dans lesquels personne n'avait trouvé de logique, et y dégager des structures mathématiques. Mettre de l'ordre dans du désordre ! J'ai commencé par m'intéresser... à la fréquence des mots dans un texte. C'était un phénomène curieux, qui ne suivait pas ce que l'on appelait, et que l'on appelle encore, une loi "normale". Quand on représente la répartition des mots par un graphique, la courbe n'a pas la forme en cloche à laquelle obéissent de nombreux phénomènes : des mots très souvent répétés, puis un peu moins, puis encore un peu moins... Au contraire, quelques mots reviennent très souvent, puis la courbe descend vite avant de décroître beaucoup plus doucement, formant une "queue épaisse" au lieu des queues de plus en plus fines des*

*répartitions habituellement étudiées. L'existence de ces répartitions était non seulement ignorée mais niée par les statisticiens, qui ne juraient que par la loi de Gauss qui donne la fameuse courbe en cloche.*

En 1973, MANDELBROT a parlé de la fractalité<sup>8</sup>, ou irrégularité, des cours boursiers qui ne suivent pas une marche au hasard comme c'était le cas pour BACHELIER en 1900, il affirme (MANDELBROT) : *Ce que dit le modèle fractal, c'est que la fréquence des grands risques est beaucoup plus grande que ne le suggère le modèle brownien, sort à cause de la discontinuité, sort de la non concentration.*

En parlant de la gaussianité, MANDELBROT (MANDELBROT & HUDSON, 2007) annonce : *"Il était impossible que le modèle gaussien marche éternellement !"*

Aussi, MANDELBROT (WALTER, 2001) souligne :

*Quelle était donc l'idée centrale de mes travaux sur la finance ? L'idée, que l'on peut appeler ambiante, suivait la physique en utilisant le mouvement brownien. Elle admettait que les prix sont des fonctions continues du temps et que leurs fluctuations ne sont pas plus sévères que celles que décrit la distribution bien classique de Gauss. Mais l'examen des faits montrait le contraire : des fluctuations discontinues et des fluctuations tout à fait extrêmes. Tandis que le hasard brownien pouvait très légitimement être qualifié de bénin, j'ai vite dû conclure que la bourse impliquait une toute autre forme de hasard.*

MANDELBROT remet en cause la théorie moderne de la gestion de portefeuille et ce en rejetant rationalité, anticipations homogènes des investisseurs, continuité des cours boursiers et leur mouvement brownien. Ce faisant, MANDELBROT précise que les individus ne raisonnent pas seulement et ils ne sont pas toujours rationnels et égoïstes en termes d'utilité théorique. Aussi, les investisseurs n'ont pas tous les mêmes anticipations comme le préconisent les fondamentalistes. Selon lui, ces individus ne se ressemblent pas. D'ailleurs, les fonds de pension gardent leurs actions à très long terme, alors que d'autres tels que les boursicoteurs internautes changent quotidiennement leurs actions. Les individus sont tantôt des investisseurs de valeurs, tantôt des investisseurs de croissance.

---

<sup>8</sup> Une fractale, terme forgé à partir du mot latin "fractus" signifiant "irrégulier" ou "brisé", est un objet qui a la même structure vue de près, de loin ou de tous les niveaux intermédiaires. Une ligne droite est une fractale : vue de près ou de loin, c'est toujours une ligne droite. En finance, les fractales servent à mieux évaluer les risques et mieux les hiérarchiser. Richard HUDSON, ancien directeur de la rédaction européenne du Wall Street Journal, la définit comme étant une forme géométrique de structure complexe et irrégulière que l'on peut morceler en plus petites parties, dont chacune rappelle comme en écho la forme du tout à plus petite échelle. Chaque partie a donc une structure semblable à celle de l'ensemble, exactement comme si un détail représentait en plus petit la totalité.

Il bat en brèche également la continuité des cours boursiers, la discontinuité est pour lui une anomalie, il est au contraire un ingrédient essentiel des marchés, ce qui distingue la finance des sciences de la nature. Le mouvement brownien, qui est un mouvement stochastique servant de référence pour la construction des principaux modèles des marchés financiers, est loin de décrire les variations des cours. Celui-ci dicte trois hypothèses (LAMBERTON & LAPEYRE, 1997) :

- Indépendance des variations des prix : selon ce principe, les cours de l'année précédente n'ont aucune incidence ni sur les cours actuels ni sur les cours futurs. Toute l'information servant à prévoir les cours futurs est donc incorporée dans les cours actuels, de ce fait il est inutile de faire appel aux historiques des cours ;
- Stationnarité des fluctuations des cours : le processus engendrant les variations des cours reste le même au fil du temps ;
- Normalité des rentabilités : selon ce fameux principe, les rentabilités suivent une loi normale et sont représentés par une courbe en cloche.

MANDELBROT critique également le recours à la variance d'une distribution comme seule mesure de risque et la considère comme étant un non-sens mathématique. D'ailleurs, il démontre que les écarts de prix ne suivent pas une loi gaussienne, donc les prix eux-mêmes, suivent des lois de Lévy qui ne possèdent pas de second moment. D'où l'inutilité de mesurer des variances empiriques.

MANDELBROT remet en déclin la théorie de MARKOWITZ qui n'utilise dans son modèle que les deux premiers moments, l'espérance et la variance et néglige les autres moments de la distribution des rentabilités qui sont la skewness et la kurtosis.

MANDELBROT, ce père spirituel de la fractalité, rejette la normalité des distributions de probabilités.

### **2.3. Finance comportementale et comportementalistes**

La finance comportementale ou Behavioral Finance stigmatise le modèle de l'homo œconomicus et est contre toute vision neumannienne de l'investisseur. En effet, celui-ci ne peut être toujours symbole de rationalité et ne peut avoir comme souci de maximiser sa fonction d'utilité.

De ce fait, les comportements des investisseurs ne sont pas toujours soumis à des modèles classiques. Les investisseurs ne sont pas toujours rationnels et les marchés ne sont pas efficaces puisque les cours ne reflètent pas exactement les informations disponibles.

Et c'est ici qu'intervient la finance comportementale pour tenter d'expliquer et de prévoir les comportements des investisseurs et des analystes qui se laissent parfois influencer par des facteurs qui ne sont pas aussi rationnels que le risque et le rendement, et qui composent des portefeuilles en conséquence (DE BROUWER, 2001).

A la théorie moderne de portefeuille de MARKOWITZ, qui nous décrit un portefeuille optimal dans un monde rationnel, s'oppose la théorie comportementale de portefeuille, qui nous explique à quoi ressemble un portefeuille dans le monde réel. A cette intention, les comportementalistes dressent les principales failles de la gestion de portefeuille.

A ce sujet, le premier reproche adressé à MARKOWITZ c'est qu'il n'a pas tenu en considération tous les moments de la distribution des rentabilités, il n'a intégré dans son modèle que les deux premiers moments : moyenne/variance. Ces deux paramètres sont le corollaire de la normalité des rentabilités.

Le second reproche est que pour rester dans l'univers espérance/variance, il faut présumer que la fonction d'utilité est quadratique. Ce qui admet que les investisseurs sont averses absolument au risque. Cette aversion qui croît avec la richesse engendre une prime de risque, qui représente le supplément de rendement sollicité par les investisseurs pour compenser le risque inhérent à la détention d'actions. Cependant, si cette aversion pour le risque est absolue, pourquoi les investisseurs souscrivent-ils des actions ?

Dans ce cadre, la finance comportementale veille à intégrer l'aspect psychologique des investisseurs. D'ailleurs, plusieurs biais cognitifs peuvent biaiser les décisions d'investissement des acteurs financiers supposés rationnels par la finance traditionnelle tels que le mimétisme, l'aversion pour le risque, le conservatisme, les erreurs de perception, la comptabilité mentale, la versatilité dans leur choix d'investissement et autres.

En effet, JORGENSEN (LE MONTAGNER, 2005) déclare : *la finance comportementale tente de rendre compte des prix observés sur les marchés financiers lorsque ces derniers se trouvent en contradiction avec les hypothèses de la finance traditionnelle et proposer des théories nouvelles.* DE BROUWER (DE BROUWER, 2001) affirme également : *la finance comportementale est une bonne ceinture de sécurité dans la course à l'investissement. Que vous soyez pro ou amateur, vous avez tout à gagner à connaître les facettes non rationnelles du comportement des investisseurs. Vous pourrez ainsi élargir votre champ de vision et ne plus considérer seulement des variables telles que le rapport bénéfice ou perte/prix d'achat ou le rendement annualisé, mais bien l'ensemble : la valeur d'un portefeuille en termes réels.*

LE MONTAGNER (LE MONTAGNER, 2005) ajoute à son tour : *me concentrant sur les seules théories des marchés financiers, je souhaite ainsi revenir sur les apports de la finance comportementale tant en termes de description des marchés financiers qu'en termes d'implication en matière de pratiques financières. Une approche historique du développement du paradigme classique jusqu'à sa remise en cause par la finance comportementale me permettra ensuite d'esquisser le rôle que la finance comportementale est susceptible de jouer dans la structuration de la réflexion et des pratiques sur les marchés financiers dans les décennies à venir.*

Dans le même cadre, SHLEIFER A. et al. parlent du sentiment de l'investisseur et son impact sur les rentabilités des actions.

LINVILLE et FISCHER (BRENDI et al., 1998) évoquent la comptabilité mentale par laquelle les individus jaugent coûts et bénéfices psychologiques attachés à leurs décisions. Ils brossent ce que l'on appelle un Plan Comptable Général Mental.

De ce fait, les adeptes de la finance comportementale viennent donc corriger les défauts de la finance traditionnelle en général et de la théorie moderne de portefeuille notamment. D'ailleurs, la finance comportementale remet en cause le recourt par la gestion de portefeuille à la fonction d'utilité qui met en relief le profil de l'investisseur et son patrimoine et mésestime donc son profil psychologique. Pour eux, la fonction d'utilité ne peut correspondre aux comportements des individus.

Dans cet ordre d'idées, plusieurs chercheurs se focalisent sur l'étude de la finance comportementale, entre autres nous citons :

### **2.3.1. ALLAIS M.**

Le comportement de l'Homme ne serait pas uniquement dicté par un calcul simple entre des probabilités et des niveaux de satisfaction face à différentes alternatives, comme le propose la théorie de l'utilité attendue (SUSSKIND, 2005).

Ainsi, tout un courant comportementaliste a vu le jour pour prendre parti pour la finance comportementale qui sous-entend la non normalité des rentabilités financiers et dont le chef de file est bien entendu le français Maurice ALLAIS. Celui-ci a montré en 1953 les failles du modèle de l'investisseur rationnel mis en place par VON NEUMAN et MORGENSTERN et remet donc en cause la fonction d'utilité. Et par le truchement de son *paradoxe d'ALLAIS*, il arrive à infirmer l'axiome d'indépendance à la VON NEUMAN et MORGENSTERN, cet axiome est le pilier de la théorie de l'utilité espérée.

### **2.3.2. TVERSKY A. & KAHNEMAN D.**

TVERSKY et KAHNEMAN sont les leaders de la théorie des perspectives, KAHNEMAN a eu le prix Nobel en 2002 en matière de psychologie cognitive et son impact sur les motivations de l'individu, ils ont battu en brèche la théorie d'utilité qui se trouve au cœur de la finance moderne.

Au chapitre de la comptabilité mentale, KAHNEMAN et TVERSKY (BRENDI et al., 1998) en 1984 pensent que les individus structurent leurs décisions spontanément dans le sens des comptes thématiques, qui jouent un rôle analogue, dans le contexte du comportement de décision, aux bonnes formes dans la perception, et aux catégories de base dans la cognition.

Ce faisant, ces deux apôtres de la finance comportementale nient toute attitude neumannienne des investisseurs.

Dans ce contexte, KAHNEMAN et TVERSKY centrent leur intérêt sur les comptes mentaux en soumettant certains individus à des épreuves. Dans cette épreuve, tous les participants décident d'aller au théâtre. Il est demandé à certains d'entre eux s'ils achèteraient une deuxième place de théâtre au prix de 10 dollars s'ils constataient avoir perdu leur ticket initial. Il est demandé à d'autres s'ils achèteraient une place de théâtre à 10 dollars après avoir constaté la perte d'un billet de 10 dollars. Le nombre de participants prêts à acheter une place de théâtre après constat de la perte d'un billet de 10 dollars est supérieur à celui de ceux qui ont perdu leur ticket. KAHNEMAN et TVERSKY suggèrent que la place perdue est rangée dans un compte-places de théâtre mental, qui fait passer le coût de la sortie au théâtre de 10 à 20 dollars.

En revanche, les 10 dollars perdus ne sont pas imputés au même compte que la place de théâtre. Ainsi, les participants à la rubrique place perdue consolident le coût d'une nouvelle place avec la perte précédente, alors que ceux de la rubrique argent perdu ne le font pas. (AFTALION, 2003)

En effet, une place de théâtre perdue se verra attribuée une valeur négative plus importante dans un compte lié au théâtre qu'une perte passée d'argent, car la place est plus représentative de la sortie au théâtre que l'argent liquide.

Cet exemple met l'accent sur l'heuristique des individus qui sont loin d'être rationnels par excellence.

### **2.3.3. STATMAN M. & SHEFRIN H.**

STATMAN & SHEFRIN (LE MONTAGNER, 2005) remettent en échec l'apport essentiel issu des travaux de MARKOWITZ et renoncent à la gestion indicielle qui écarte l'apport personnel de l'asset manager ou le gestionnaire de portefeuille. Ils parlent d'une gestion comportementale de portefeuille qui pointe le doigt sur les déformations des probabilités qui tiennent compte des observations expérimentales et s'appuie sur la façon dont les investisseurs individuels construisent réellement leur portefeuille.

Aujourd'hui, il est de plus en plus intéressant de parler de cette gestion comportementale de portefeuille pour corriger les anomalies de la gestion de portefeuille standard qui met de l'avant un épargnant-type ayant le souci majeur de rétrécir le risque de son placement pour un rendement donné et inversement. Or, les investisseurs n'ont pas tous le même profil et ne sont pas des êtres parfaitement rationnels ce qui est en faveur de la gestion comportementale de portefeuille et semble aujourd'hui revêtir une importance primordiale car elle permet d'expliquer les comportements observés sur les marchés. Autrement dit, elle veille à élaborer une théorie plus réaliste qui repose sur les comportements des investisseurs vis-à-vis du risque.

La gestion comportementale de portefeuille se dévie de la littérature standard en finance qui songe que les investisseurs se préoccupent notamment de la variance des rentabilités. Cette variance donne une mesure des écarts moyens par rapport à la moyenne escomptée. Tels écarts ont donc le même effet sur cette mesure qu'ils soient positifs ou négatifs.

Profonde erreur ! Les individus sont en général plus sensibles aux réalisations de rentabilités en dessous de la moyenne qu'à celles au-dessus, chose qui est marginalisée par la gestion normative de portefeuille.

Ainsi, pour l'investisseur individuel la gestion de portefeuille semble obéir à des phénomènes comportementaux puisque les portefeuilles détenus et leur gestion semblent peu conformes aux prescriptions des modèles classiques (BROIHANNE et al., 2006). De ce fait, l'apparition de modèles comportementaux est désormais importante. Ces modèles partent de l'idée selon laquelle les investisseurs, qu'ils soient individuels ou collectifs comme les fonds de pension, ne sont que des Hommes qui ne sont pas parfaitement rationnels et qui sont guidés par leurs émotions et leurs intuitions déterminant leurs choix d'investissement.

Il convient idéalement de souligner que le postulat de la gestion comportementale de portefeuille est un modèle comportemental dit SP/A (Idem, 2004). Ce sigle désigne à la fois

Sécurité, Potentiel et Aspiration. En effet, et via son objectif de *sécurité*, l'investisseur vise à se prémunir contre une perte maximale de son portefeuille. Le *Potentiel* reflète son souhait d'atteindre des gains pléthoriques. Alors que l'*Aspiration* désigne l'envie impérieuse de l'investisseur de faire évoluer sa richesse.

#### **2.3.4. SHILLER R.**

Les économistes qui doutent de la validité de l'hypothèse des marchés efficients aiment bien raconter la blague suivante :

*Deux adeptes des marchés efficients marchent dans la rue et voient sur le trottoir un billet de 100 USD, aucun des deux ne se penche pour le prendre, pensant que si c'était un vrai billet de 100 USD, quelqu'un l'aurait déjà ramassé.*

SHILLER<sup>9</sup> qui est l'un des célèbres adversaires de la théorie d'efficience des marchés financiers se serait certainement penché pour le ramasser. Il a tant contesté l'efficience des marchés financiers notamment à travers ses travaux traitant de l'exubérance irrationnelle des marchés.

SHILLER, qui donne un nouveau souffle à la théorie behavioriste, recourt à la sociologie, à la psychologie, aux méthodes statistiques et même à l'histoire des 400 dernières années pour montrer que les marchés boursiers ne sont guère efficients. Dans un ouvrage intitulé *Market Volatility*, SHILLER déclare que la majeure partie de la volatilité des cours boursiers n'est pas due à des facteurs économiques ou financiers liés aux entreprises. En d'autres termes, plus de 50% des fluctuations des cours boursiers dépendent de l'humeur des investisseurs et de leur perception purement subjective du marché.

Egalement, SHILLER jette un pavé dans la mare de la fameuse finance traditionnelle dominante soumise au principe sacro-saint de la rationalité. A cet égard, il démontre, dans son ouvrage *Irrational Exuberance* (SHILLER, 2016), que la théorie financière ne permet pas de comprendre le fonctionnement des marchés financiers contemporains.

Il décèle les facteurs qui provoquent l'exubérance et qui ont en commun le fait d'avoir contribué à la psychologie auto-réalisatrice des marchés boursiers en expansion. A sa guise, SHILLER bat en brèche la rationalité des opérateurs. Selon lui, il est hors de doute que la

---

<sup>9</sup> Robert SHILLER est un défenseur ardent de la finance comportementale et est professeur de finance à l'Université de Princeton, l'une des plus prestigieuses universités américaines.

finance traditionnelle ne peut guère expliquer le fonctionnement des marchés financiers contemporains.

### **2.3.5. POLKOVNICHENKO V.**

La diversification, qui est la clef de voûte de la théorie moderne de portefeuille, n'est au vrai que la mise en oeuvre de l'adage populaire qui dicte qu'il ne faut pas mettre tous les œufs dans un même panier. Son principe est qu'elle permet aux boursicoteurs d'optimiser leurs placements en investissant dans des différents titres ou différents secteurs voire différents pays.

Or, POLKOVNICHENKO a, en 2005, mis en avant une anomalie des comportements des investisseurs sur les marchés financiers dite de sous-diversification. En effet, après l'observation des comportements de 14 millions ménages américains, POLKOVNICHENKO a conclu que ces derniers ne détenaient dans leurs portefeuilles que 1 à 5 actifs. Ils considèrent qu'un portefeuille qui est investi dans des titres connus préalablement et qui leurs sont familiers est moins risqué qu'un autre qui est investi dans des valeurs moins connus. (SEJOURNE, 2006)

Ces ménages, qui sont assujetties à une anomalie dite *heuristique de familiarité* (MANGOT, 2005), diversifient mal leurs placements, selon eux la diversification telle qu'elle a été introduite par MARKOWITZ n'est qu'une foutaise. Ceci remet en cause les paramètres moyenne/variance de la fameuse gestion de portefeuille, tels paramètres sont le pilier de la normalité des rentabilités sur les marchés boursiers.

### **Conclusion**

Cette recherche a élucidé une controverse qui lie les apôtres et les opposants de la gaussianité des rentabilités sur les marchés financiers.

En effet, la finance traditionnelle repose sur la théorie de normalité des marchés. A cet égard, les tenants de la normalité appuient leur théorie sur la nécessité de modéliser les marchés financiers par le couple rendement/risque. Tel couple est le prélude de la plupart des théories des marchés financiers comme la théorie de l'efficience qui stipule que les cours boursiers sont supposés à tout moment refléter toute l'information disponible du marché.

Mais, force est de constater que le marché n'obéit pas aux seuls paramètres rentabilité/risque. Il y a d'autres moments qui sont importants telles la skewness et la kurtosis qui sont négligés par la finance traditionnelle.

Dans ce contexte, la finance comportementale prend corps. Celle-ci est la traduction implicite de la non normalité des marchés financiers puisqu'elle énonce que les investisseurs ne sont pas pleinement rationnels et agissent selon leurs croyances et leurs émotions. Ce qui va à l'encontre de la finance traditionnelle et ses corollaires.

### **Références bibliographiques**

- AFTALION F. (2004), L'homoeconomicus est-il encore rationnel ? Institut Turgot, rencontre Turgot du 2 novembre.
- AFTALION F. (2003), La nouvelle finance et la gestion des portefeuilles, édition Economica.
- BACHELIER L (1901), Théorie mathématique du jeu, annales scientifiques de l'ENS, 3ème série, tome 18.
- BENJANA H. (2010), Analyse de la (non) normalité des rendements des OPCVM actions gérés par les portefeuillistes marocains, Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et Sociales d'Oujda.
- BRENDL C-M. et al. (1998), La comptabilité mentale comme autorégulation : représentativité pour les catégories dirigées par un but, recherche et applications en marketing, vol. 15, n° 1/2000.
- BROIHANNE M-H. et al. (2006), L'émergence de la finance comportementale, revue échanges n° 236, octobre 06.
- BROIHANNE M-H. et al. (2004), Finance comportementale, édition Economica.
- DE BROUWER P. (2001), La finance comportementale ou la psychologie de l'investisseur, Fortis Investment Management, finances vecteur.
- BROQUET C. et al., (2007), Gestion de portefeuille, édition De Boeck Université.
- DELBARADE J.M. (1995), Mathématiques des marchés financiers, édition ESKA.
- EDWARDS R. & MAGEE J. (2002), L'analyse graphique des tendances boursières, édition Valor.
- GALAVIELLE J-P. (2003), Y a-t-il une théorie des marchés financiers ? Document de travail.
- GEMAN H. et al. (2002), Mathematical finance : Bachelier congress 2000, édition Springer.

- HARRAB S. & TAOUAB O. (2017), Peut-on toujours parler de l'efficacité des marchés financiers ? Revue du Contrôle de la Comptabilité et de l'Audit, ISSN: 2550-469X, Numéro 3.
- JACUILLAT B. & SOLNIK B., Marchés financiers, édition Dunod 2002.
- LAMBERTON D. & LAPEYRE B. (1997), Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance", édition Ellipses.
- JOVANOVIC J. (2009), Le modèle de marche aléatoire dans la théorie financière quantitative de 1863 à 1976.
- LE MONTAGNER H-R. (2005), La finance en débat, cahier de recherche du GREGOR n° 2005-05.
- MANDELBROT B. & HUDSON R-L. (2007), The behavior of markets : a fractal view of risk, Ruin, and Reward, scrapbook of reviews of the behavior of markets.
- MANDELBROT B., L'application des fractales à la finance, entretien avec Mandelbrot.
- MANGOT M. (2005), Psychologie de l'investisseur et des marchés financiers, édition Dunod.
- ORLEAN A. (2004), Efficacité, finance comportementale et convention : une synthèse théorique, les crises financières, conseil d'analyse économique,
- ORLEAN A. (2003), Les marchés financiers sont-ils rationnels ? " Revue la recherche, n° 364.
- SEJOURNE B. (2006), Pourquoi le comportement des épargnants français est-il si peu conforme à la théorie traditionnelle du portefeuille ? Les cahiers scientifiques n° 1, Université d'Angers (GEAPE) et Autorité des Marchés Financiers (AMF).
- SUSSKIND A. (2005), La finance comportementale, édition Larcier.
- TACHET DES COMBES R. (2011), Non-parametric model calibration in finance, thèse de doctorat sous la direction, Ecole centrale, Paris.